

法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

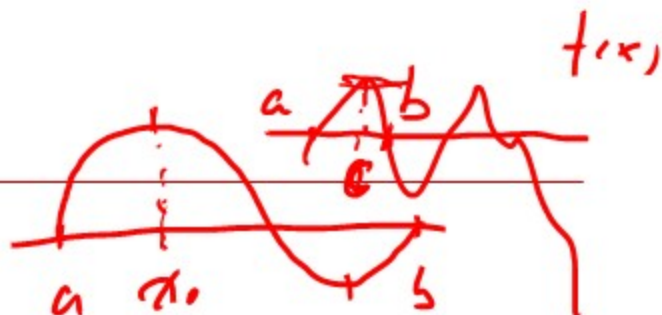
□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



微分中值定理



罗尔 (Rolle) 微分中值定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 并且 $f(a) = f(b)$. 又假设 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 则必存在一点 $c \in (a, b)$, 使得 $f'(c) = 0$

Pf.

① $f(x) \in [a, b]$, M, m .

$M = m$, $f(x) = \text{const.}$ $\frac{a-b}{2} = c$, $f'(c) = 0$

② $M > m$.

$\Delta x > 0$.

$\Delta x < 0$

$M \neq f(c)$, $M > f(a)$, $f(x_0) = M$.

$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

$\geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

$f'(x_0) = 0$

$f'(x_0) = 0$

微分中值定理

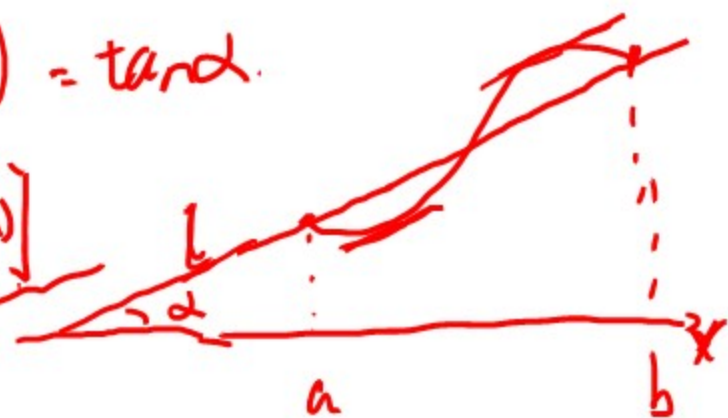
拉格朗日 (Lagrange) 微分中值定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则必存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tan \alpha$$

证:

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right]$$



$$F(a) = 0 = F(b)$$

$$F(x) \in (a, b)$$

$$\therefore \exists \xi \in (a, b)$$

$$F'(\xi) = 0$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

微分中值定理

$$\left. \begin{aligned} f(x) \in C[a, b], f(x) \equiv C &\Leftrightarrow f'(x) \equiv 0 \\ &\text{"}\Leftarrow\text{"} \end{aligned} \right\}$$

推论一

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导。若 $f'(x) = 0$ ，则 $f(x) \equiv C$ ，其中 C 是常数。

$\forall x \in [a, b]$ $[a, x]$ 用 Lagrange 中值定理

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a, x), \quad f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$$

$$f(x) = f(a)$$

$$\Rightarrow f(x) \equiv f(a) \quad \square$$



微分中值定理

推论二

设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导. 若 $f'(x) = g'(x)$ ，
则 $f(x) = g(x) + C$ ，其中 C 是常数。

$$\Rightarrow (f-g)' = 0$$

$$\Rightarrow f-g = C$$

$$\Rightarrow f = g + C$$

□

微分中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(a+\theta(b-a))}{g'(a+\theta(b-a))}$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(a+\theta(b-a))}{g'(a+\theta(b-a))}$$

$$0 < \theta < 1$$

柯西 (Cauchy) 微分中值定理

设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $g'(x) \neq 0$ ，则必存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Pf:

$$G(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \right]$$

$$G(a) = 0 = G(b) \Rightarrow$$

$$G'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) = 0$$

$$\xi \in (a, b) \quad G'(\xi) = 0$$

令 $u = g(x)$ x 为 u 的函数

$v = f(x)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{v(b) - v(a)}{u(b) - u(a)}$$

即 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{v(b) - v(a)}{u(b) - u(a)}$

泰勒公式

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$$

$$f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n}$$

n-1次导数

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n-1)}(x_0)}{n! (x-x_0)}$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{x-x_0} = 0$$

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有 n 阶 ($n \geq 1$) 导数, 则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$f^{(n)}(x_0)(x-x_0) \quad o(\Delta x^n)$$

注:

(1) 当 $f(x)$ 在点 x_0 处具有 n 阶 ($n \geq 1$) 导数时, 我们称

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒多项式, 其中 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 为泰勒公式的余项, 特别的, 当 $x_0 = 0$ 时, 我们称此时的泰勒公式为麦克劳林(Maclaurin)公式

泰勒公式

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有 n 阶($n \geq 1$)导数,则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0)$$

注:

(2) 称类似于 $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ 的余项为佩亚诺余项。

(3) 当 $f(x)$ 在点 x_0 处具有 n 阶($n \geq 1$)导数,且在 x_0 附近成立

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0)$$

则必有

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$O(x^n)$
 $O((x-x_0)^n)$

唯一性定理

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$

泰勒公式的计算

- 求 $f(x) = e^x$ 的带佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad f^{(k)}(x) = e^x$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} e^x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \\ &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

泰勒公式的计算



- 求 $f(x) = \sin x$ 的带佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$f^{(n)}(0) \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\text{取 } x=0 \quad (\sin 0)^{(n)} = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin x = \sin 0 + \frac{\sin^{(1)} 0}{1!} x + \frac{\sin^{(2)} 0}{2!} x^2 + \dots + \frac{\sin^{(n)} 0}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$= \begin{cases} (-1)^k & n=2k+1 \\ 0 & n=2k \end{cases}$$

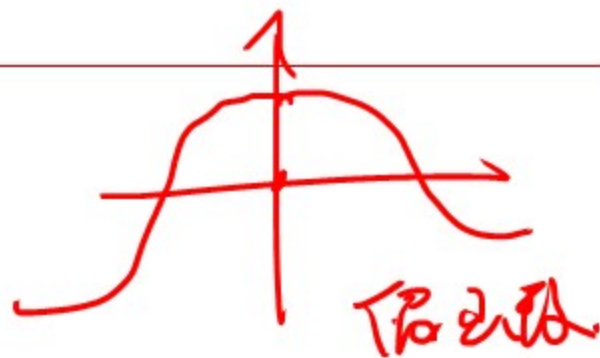
$$= 0 + \frac{1}{1!} x + \frac{-1}{3!} x^3 + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$$

泰勒公式的计算

- 求 $f(x) = \cos x$ 的带佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$



$$\text{当 } x=0$$

$$= \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k & n=2k \\ 0 & n=2k+1 \end{cases}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \dots$$
$$+ \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

泰勒公式的计算

- 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 的带佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

$$x=0$$

$$f(0)=0$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)! \quad k=1, 2, \dots, n$$

$$\ln(1+x) = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$



泰勒公式的计算

- 求 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 的带佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$f^{(k)}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}}{k!}$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{有 } k \text{ 项}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$(x \rightarrow 0)$

泰勒公式的计算

- 求 $f(x) = \arctan x$ 的带佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(1+x)^{\alpha} = g(x) \quad g^{(k)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-1-k+1)(1+x)^{-1-k}$$

$$= (-1)^k k! (1+x)^{-1-k}$$

$$\alpha = -1 \quad g^{(k)}(0) = (-1)^k k!$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \quad (x \rightarrow 0)$$

泰勒公式的计算

- 求 $f(x) = \arcsin x$ 的带佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3!!}{4!!}x^4 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{1}{3} \frac{1}{2!}x^3 + \frac{3!!}{5 \cdot 4!!}x^5 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(2n+1)} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

泰勒公式的计算

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots$$

- 求 $f(x) = e^{\cos x}$ 的带佩亚诺余项的麦克劳林公式，展到 x^4

$$① f'(x) = -e^{\cos x} \sin x$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)$$

$$② e^{\cos x} = e \cdot e^{\cos x - 1}$$

$$= e \left[1 + \cos x - 1 + \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + o((\cos x - 1)^2) \right]$$

$$= e \left(1 + 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right)^2 + o(x^4) \right)$$

$$= e \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{x^2 o(x^2)}{o(x^4)} + o(x^4) \right) + o(x^4) \right)$$

$$= e \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \right)$$

$$= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\frac{x^2 o(x^2)}{x^4} \rightarrow 0$$

泰勒公式的计算

$$x^5 = o(x^4)$$

- 求 $f(x) = e^x \ln(1+x)$ 的带佩亚诺余项的麦克劳林公式，展到 x^4

$$\begin{aligned} e^x \ln(1+x) &= \left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right) \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right) \\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4) + x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+o(x^4) \\ &\quad + \frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x^4) + \frac{1}{6}x^4+o(x^4) \\ &= x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+0+o(x^4) \\ &= x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^4) \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

泰勒公式的计算

无穷小量中的估计方法

- 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (1 - n \sin \frac{1}{n})$ $\frac{\infty \cdot 0}{\frac{1}{n}}$ $\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ $o(\frac{1}{n^6}) = o(\frac{1}{n^5})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{3!} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{n^5} + o(\frac{1}{n^6}) \right] \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[1 - 1 + \frac{1}{6} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{5!} \frac{1}{n^4} + o(\frac{1}{n^5}) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5!} \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^3}) \right)$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + o(x^6)$$

($x \rightarrow 0$)

$$\sin x \sim x$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\sin x - x = -\frac{1}{3!} x^3 + o(x^3)$$

$$\sin x - x \sim -\frac{1}{6} x^3 \quad (x \rightarrow 0)$$



常见基本初等函数的泰勒公式

$$e^x - 1 \sim x \sim x^2$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

① $P_n(x)$ 逼近 $f(x)$ $o(x^n)$

② $x \rightarrow 0$ 低阶项

1-阶无穷小形式, 2阶
可忽略

$$(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x \quad \text{1阶} - \text{1阶}$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

③ 1-2阶项

泰勒公式余项的估计

$P_n(x)$ 逼近 $f(x)$
 $R_n(x) < O(x^n)$
拉格朗日余项

定理 函数 $f(x)$ 在点 (A, B) 内具有 $n+1$ 阶 ($n \geq 1$) 导数, 则对于 (A, B) 中任意取定一点 x_0 以及任意的 $x \in (A, B)$ 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$\rightarrow O((x-x_0)^n)$
 $(x \rightarrow x_0)$

其中 ξ 是介于 x 和 x_0 之间一点。形如 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ 的余项称为拉格朗日余项。

例 $f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$

拉格朗日中值定理

泰勒公式余项的估计

拉格朗日余项为泰勒公式的逼近误差提供了估计。设 M 是 $|f^{(n+1)}(t)|$ 在 $[x, x_0]$ 上或 $[x_0, x]$ 上的一个上界。那么泰勒公式的误差

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (x \rightarrow x_0)$$

有下列估计：

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

$$\begin{aligned} & |(\cos x)^{(n)}| \\ &= |\cos(x + \frac{n\pi}{2})| \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

- ① M 很容易，很容易被估计
- ② 高阶项误差更小
- ③ n 越大，误差越小 Taylor 多项式逼近几项

泰勒公式余项的估计

例：设 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ ，在使用带拉格朗日余项的泰勒公式计算 $\sin x$ 时，为了使公式误差小于 5×10^{-7} ，应当在泰勒公式中取多少项？

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos \xi}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$|R_{n+1}| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} < \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R_n(x)$$

$$< \frac{1}{(2n+1)!} < 5 \times 10^{-7}$$

$$\underline{n=5} \quad \frac{1}{11!} < 3 \times 10^{-8}$$

常见基本初等函数的泰勒公式

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} (-\infty < x < +\infty)$
- $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + (-1)^n \frac{\cos \xi}{(2n+1)!}x^{2n+1} (-\infty < x < +\infty)$
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!}x^{2n+2} (-\infty < x < +\infty)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1} (-1 < x < +\infty)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} (-1 < x < +\infty)$

极值问题

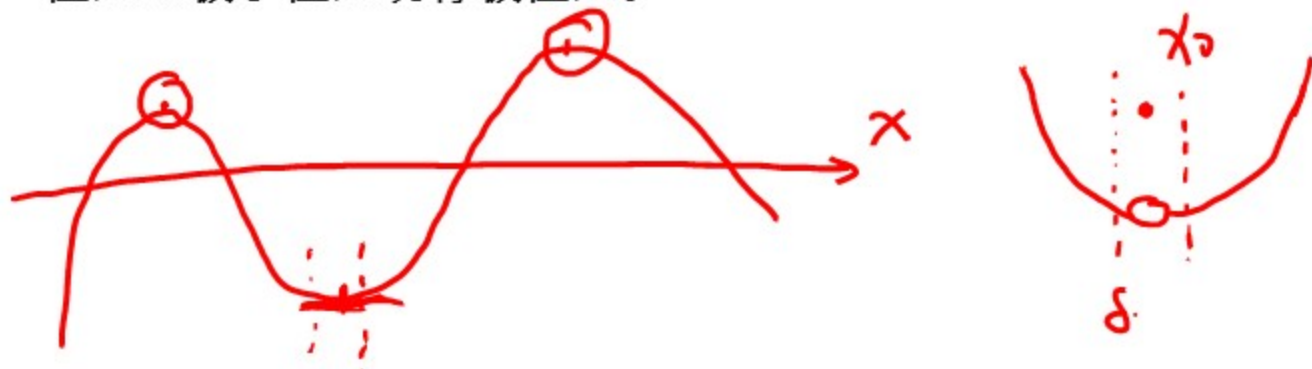
我们称 x_0 是函数 $y = f(x)$ 的极值点，如果该函数在 x_0 附近有定义并且存在一个邻域 $U_\delta(x_0)$ ，使得

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

或者

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

在前一种情况下，我们称函数值 $f(x_0)$ 为极大值， x_0 为极大值点，而在后一种情况下，称 $f(x_0)$ 为极小值， x_0 为极小值点。极大值与极小值统称极值，极大值点与极小值点统称极值点。



极值问题

$C \cup D \subset \infty$

$$\underline{f'(x) = 0}$$

费马定理

设 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上有定义。若 $x_0 \in (a, b)$ 是 $y = f(x)$ 的极值点，且 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f'(x_0) = 0$ 。我们将导数为零的点称为驻点，也称为稳定点或者临界点。

stable

设 x_0 是极大值点

$$U_\delta(x_0) \subseteq (a, b)$$

$$\forall x \in U_\delta(x_0)$$

$$f(x) \leq f(x_0)$$

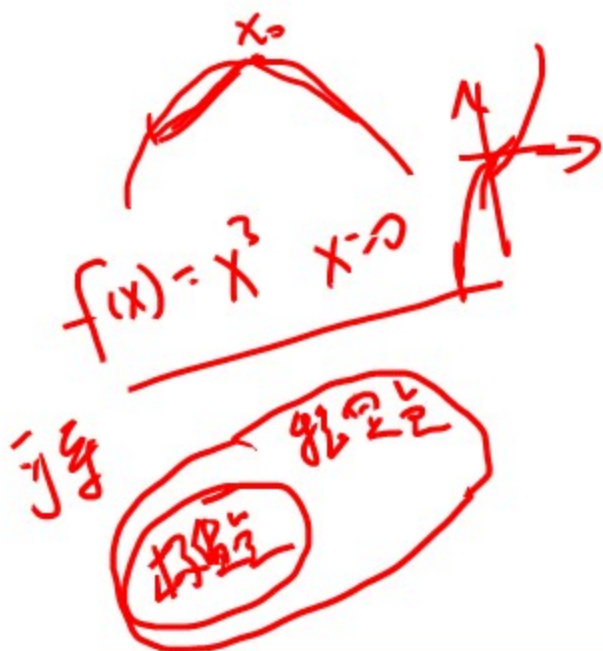
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

$$f'(x_0) = 0$$



极值问题

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则：

(1) $f(x)$ 在 I 内单调上升的充分必要条件是 $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$

(2) $f(x)$ 在 I 内单调下降的充分必要条件是 $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ f'(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \\ f(x_1) &\leq f(x_2) \quad \uparrow \end{aligned}$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_2} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$$



$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0, \quad \forall x \in I. \\ &> 0 \quad \uparrow \\ &< 0 \quad \downarrow \\ &= 0 \quad \text{拐点} \end{aligned}$$



极值问题

例 求出 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$ 的极大值点与极小值点。

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x+1)(x-5)$$



	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 5)$	5	$(5, +\infty)$
$f'(x)$	> 0	0	< 0	0	> 0
$f(x)$	$\uparrow$	极大	$\downarrow$	极小	$\uparrow$

极大值 $x = -1$
极小值 $x = 5$

函数的凹凸性

Jensen 不等式

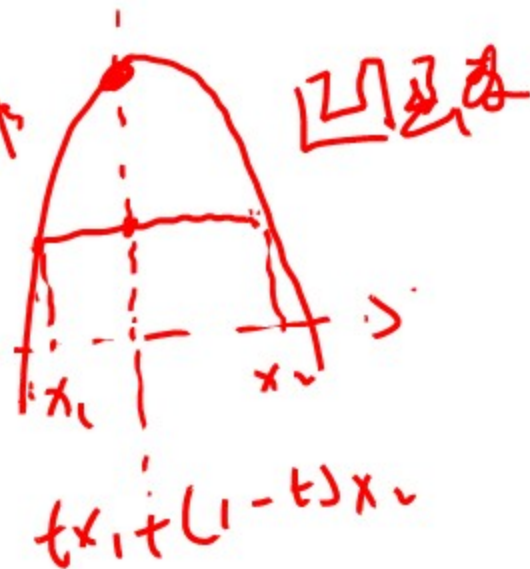
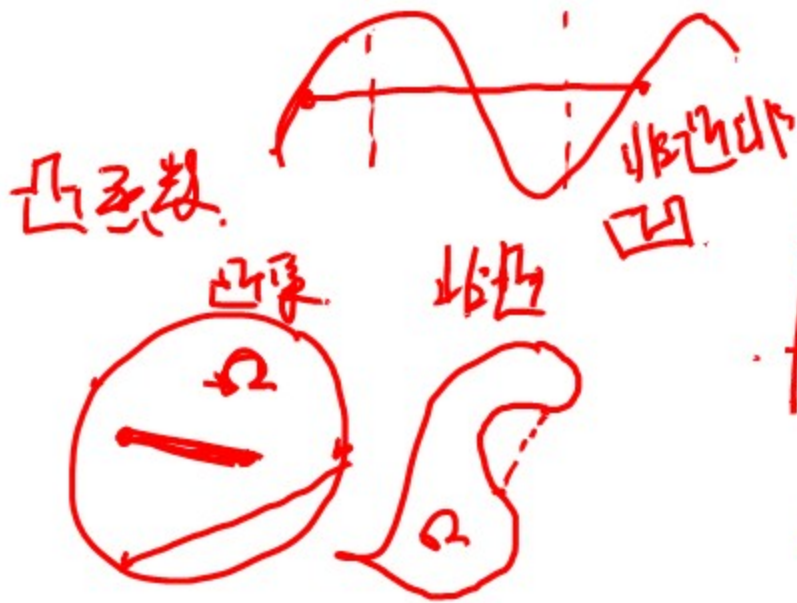
定义 假设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in (0, 1)$ 内，有

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 为 I 上的凸函数，若当 $x_1 \neq x_2$ ，总有严格不等式成立，则称 $f(x)$ 为 I 上的严格凸函数。若满足

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 为 I 上的凹函数，若当 $x_1 \neq x_2$ ，总有严格不等式成立，则称 $f(x)$ 为 I 上的严格凹函数。



函数的凹凸性

定理 假设函数 $f(x) \in C[a, b]$ 且在 (a, b) 上可导, 则 $f(x)$ 为凸函数的充分必要条件是 $f'(x)$ 在 (a, b) 内单调上升; 则 $f(x)$ 为严格凸函数的充分必要条件是 $f'(x)$ 在 (a, b) 内严格单调上升。

$\Rightarrow$ $\forall x_1 < x_2 \in (a, b), \quad f'(x_1) \leq f'(x_2)$

$h > 0, \quad x_1 - h, x_1 + h \in (a, b)$

$$\frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h}$$

$h \rightarrow 0, \quad f(x_1) \leq f(x_2)$

$f'(x)$ 在 (a, b) 内 $\uparrow$

$x_1 < x_2 < x_3 \in [a, b]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$f'(x_1) \leq f'(x_2)$

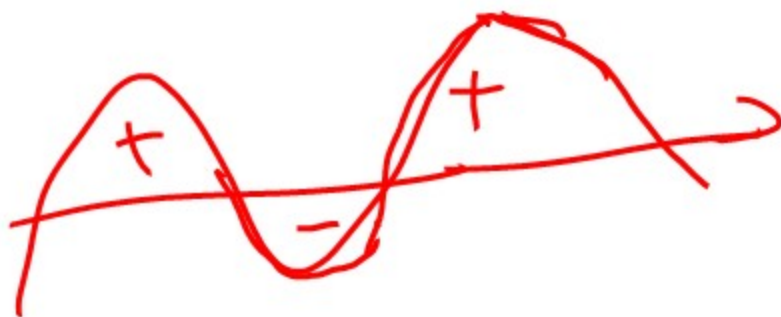
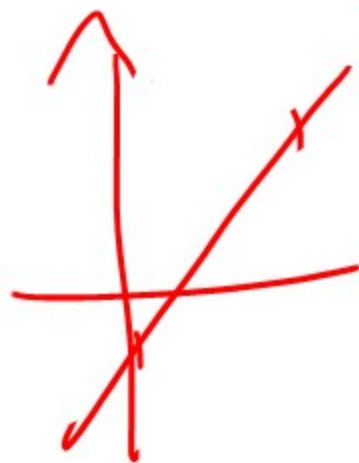
函数的凹凸性

~~A~~ 定理 假设函数 $f(x) \in C[a, b]$ 且在 (a, b) 上可导, 则 $f(x)$ 为凸函数的充分必要条件是 $f''(x) \geq 0$; 而 $f(x)$ 为严格凸函数的充分必要条件是:

- (1) $f''(x) \geq 0$ ✓
- (2) $f''(x)$ 在 (a, b) 的任意子区间上都不恒等于 0. ✓

$$f'(x) = C$$

$$f(x) = Cx + b$$



函数的凹凸性

例 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的凸函数。证明对于任意的

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b], \sum_{i=1}^n t_i = 1 \quad (t_i > 0)$$

有

$$f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \dots + t_n f(x_n)$$

而且当 $f(x)$ 为 严格凸函数 且 x_i 不全相等时，上述不等式 严格成立。

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$$

$t_2 = 1 - t_1$

Jensen

数学归纳法

① $n=2$ 定义 get ✓

② $n=k$ 成立 $n=k+1$?

$\forall x_i \in [a, b], t_i > 0, i=1, 2, \dots, k+1$
 $\sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$

$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{t_i}{1-t_{k+1}} & i=1, 2, \dots, k \\ \lambda_i > 0 & \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & f(t_1 x_1 + \dots + t_k x_k + t_{k+1} x_{k+1}) \\ &= f[(1-t_{k+1})(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) + t_{k+1} x_{k+1}] \\ &\leq (1-t_{k+1}) f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) + t_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &\leq (1-t_{k+1}) [t_1 f(x_1) + \dots + t_k f(x_k)] + t_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &\leq t_1 f(x_1) + \dots + t_{k+1} f(x_{k+1}) \end{aligned}$$

函数的凹凸性

$$h\left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n}\right) < \frac{1}{n} (h(a_1^x) + \dots + h(a_n^x))$$

$f(x) \uparrow$

调和-几何-算数平均值不等式

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} < \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} < \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$< \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} < \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

其中, $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

$f(x) \uparrow, f'(x) > 0$
 $x \neq 0$

$\ln f(x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2} \left(x \frac{a_1^x \ln a_1 + \dots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + \dots + a_n^x} - \ln \frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)$$

pf: $a_1, a_2, \dots, a_n$ 不全相等

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} & x = 0 \end{cases}$$

$$h(u) = u \ln u$$

$$h''(u) = \frac{1}{u} > 0$$

$f(x)$ = 算术均值 $f(-1)$ = 调和均值

$$f(-1) < f(0) < f(1)$$

函数的凹凸性

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad \text{柯西不等式}$$

设 $a_i > 0, b_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ ，证明：

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq \|\vec{a}\|_p \|\vec{b}\|_q$$

其中 $0 < p, q < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ，此时不等式称为赫尔德不等式，当 $p = q = 2$ 时，又称施瓦茨不等式或者柯西不等式，它表明 n 维空间中两个向量夹角余弦之绝对值不超过 1。

$$f(x) = x^{\frac{1}{q}} \quad f''(x) = \frac{1}{q} \left(\frac{1}{q} - 1 \right) x^{\frac{1}{q} - 2} < 0 \quad \frac{1}{q} < 1$$

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凹函数

$$t_1 x_1^{\frac{1}{q}} + t_2 x_2^{\frac{1}{q}} + \dots + t_n x_n^{\frac{1}{q}} \leq (t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)^{\frac{1}{q}}$$

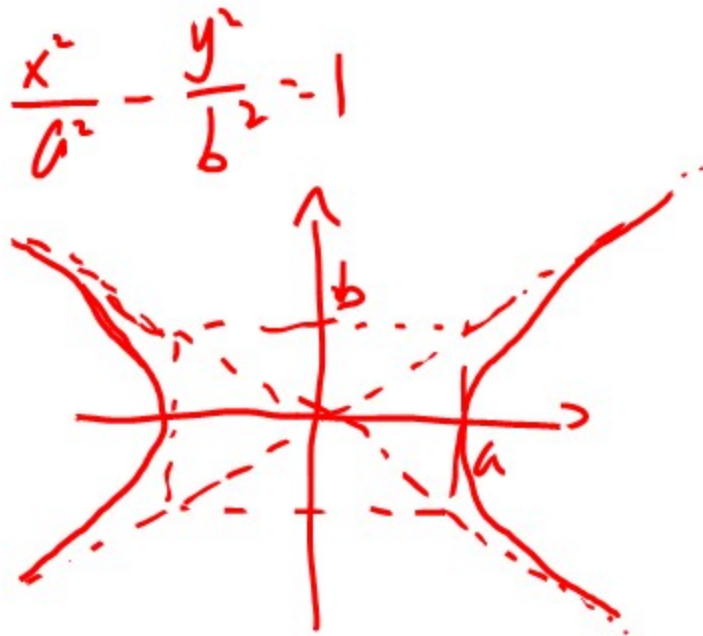
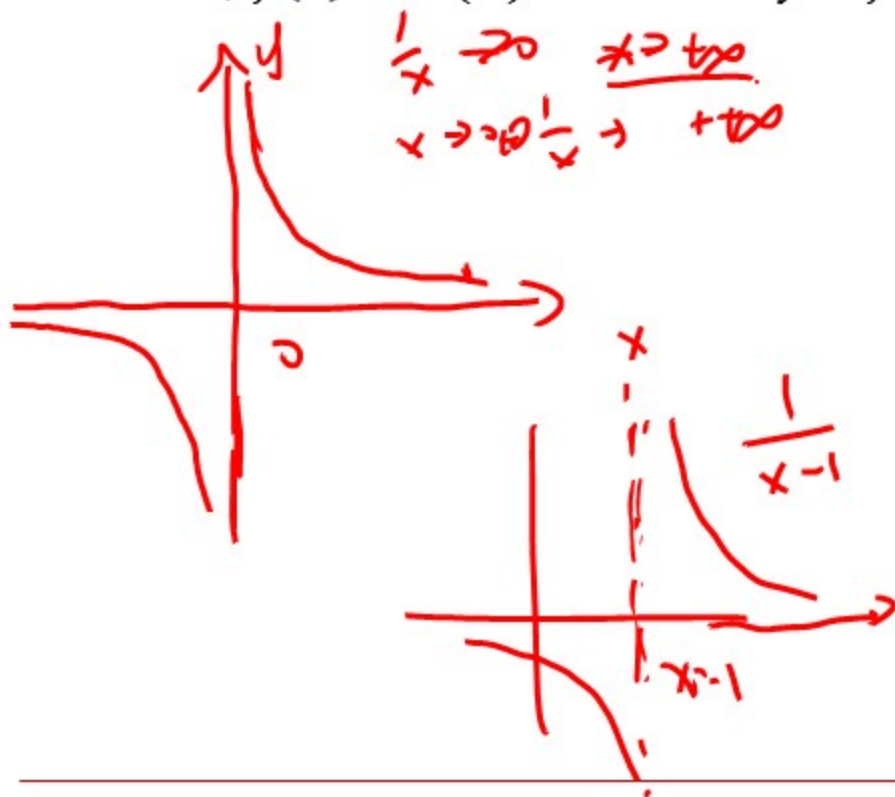
$$t_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \quad x_i = \frac{b_i^q}{a_i^p}$$

$$\frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \leq \frac{(b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}}}$$

渐近线

$+\infty$

设函数 $y = f(x)$, 定义在 $(c, +\infty)$, 称直线 $y = ax + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 的一条渐近线, 如果当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 点 $(x, f(x))$ 到直线 $y = ax + b$ 的距离趋于零。一种特殊情况是, $a = +\infty$, 称 $y = b$ 是水平渐近线。以及当 $x \rightarrow c$ 时, $f(x) \rightarrow +(-)\infty$ 称 $x = c$ 是 $y = f(x)$ 的一条垂直渐近线。



渐近线

$$y = x$$

$$y = 2x$$

一种判断方法 设函数 $y = f(x)$, 定义在 $(c, +\infty)$, 则直线 $y = ax + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 的一条渐近线的充分必要条件是

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$



$$f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$$

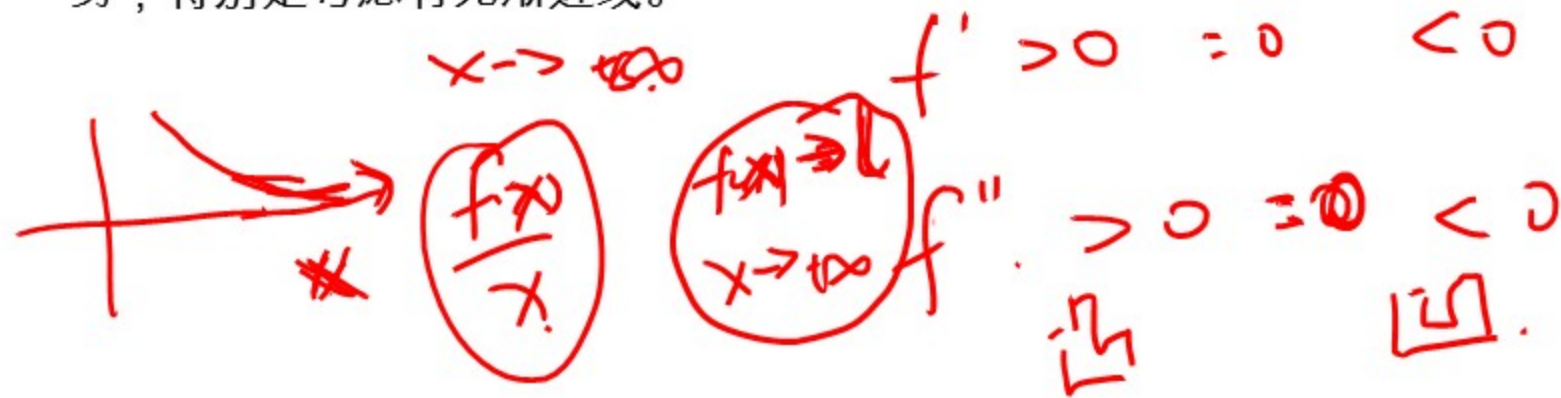
$$\cancel{f(x) - ax} \rightarrow b$$

$$\underline{\underline{f(x) - ax}}$$

函数作图方法



- 考察函数定义域，及其在定义域内的连续性，可微性（当然一般都是可微的）。如果有间断点、不可微点，需要将这些点的函数值（如果存在的话）计算出来，并且描绘出相应的点。在间断点附近还需要弄清左右极限。
- 求出函数的导函数，找出稳定点、单调区间和极值点。
- 求出二阶导数，确定凹凸性和拐点（凹凸性改变的点）
- 在定义域不是有穷区间的情况下，考虑 $x \rightarrow +\infty$ 或者 $x \rightarrow -\infty$ 的函数变化趋势，特别是考虑有无渐近线。



函数作图方法

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$x > 1 \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix}$$

是断点 $x < 1$ 

$$\frac{y}{x} \rightarrow 1 \quad x \rightarrow \infty$$

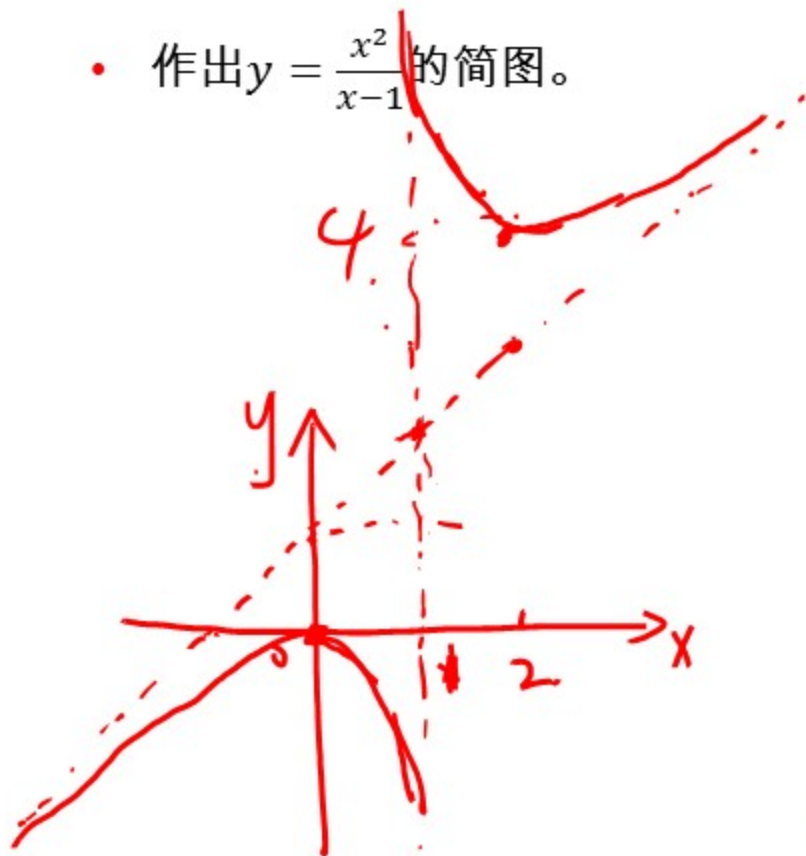
$$\frac{x^2}{x-1} - x \rightarrow 1$$

$y = x+1$ 是渐近线

$$y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

	$x < 0$	0	$(0, 1)$	1	$x > 1$
y'	> 0	$= 0$	< 0	$= 0$	> 0
y	$\uparrow$	大	$\downarrow$	小	$\uparrow$

- 作出 $y = \frac{x^2}{x-1}$ 的简图。



要点回顾

- 微分中值定理

罗尔、拉格朗日、柯西微分中值定理

✓ 重要推论：导数为零等价于常数函数

- 泰勒公式

含义：一般函数的多项式逼近

误差估计：佩亚诺余项，拉格朗日余项

✓ 基本初等函数的泰勒展开

- 泰勒公式的应用 -> 函数性质研究

函数单调性

函数极值点

函数的凹凸性



$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Handwritten notes showing the Taylor expansion of e^x and the function $f(x)$ being approximated by a polynomial $P_n(x)$.

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Handwritten notes showing the Taylor expansion of $f(x)$ around x_0 and the error term $R_n(x)$.

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$$

get ✓

$$f'(x) > 0 \uparrow \quad < 0 \downarrow$$
$$= 0 \text{ stable} \rightarrow \text{拐点}$$
$$f'' > 0 \quad \text{凹} \quad f'' < 0 \quad \text{凸}$$

我们在这里

□ 问题答疑：

<http://www.xxwenda.com/>

■ 可邀请老师或者其他人回复问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop

