

法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



矩阵

matrix

定义 (矩阵) 由 $s \cdot m$ 个数排成 s 行、 m 列的一张表，被称为一个 $s \times m$ 的矩阵，其中每一个数被称为这个矩阵的一个元素，第 i 行、第 j 列交叉位置上的元素被称为矩阵的 (i, j) 元。矩阵通常用大写的英文字母 $A, B, \dots$ 表示，一个 $s \times m$ 的矩阵可以简单地记为 $A_{s \times m}$ ，它的 (i, j) 元记为 $A(i; j)$ 。如果矩阵的 (i, j) 元是 a_{ij} ，那么可以记为 $A = (a_{ij})$ 或者 $A = (a_{ij})_{s \times m}$ 。

e.g.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 0 \\ 4.6 & 7 \end{bmatrix}$$

$A(1;1) = 1$
 $A(1;2) = 2$

$B(2;1) = 0$

$s \times m$ 的表

矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

- 元素全为0的矩阵称为零矩阵，简记为0。s行m列的零矩阵可以记为 $0_{s \times m}$ 。
- 如果一个矩阵行数与列数相等，则称为方阵，m行m列的方阵也称为m级矩阵。
- 主对角线，次对角线，反对角线


$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = A$$

主对角线 $\sim$ 次对角线 $\sim$

$$\text{diag } A = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

列向量

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

次对角线

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

反对角线

矩阵的转置 *transpose*

定义 (转置) 对于 m 行 n 列矩阵 A ，如果

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$(a_{ij})_{m \times n}$

把 A 的行和列互换 可以得到

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$n \times m$

称为 A 的转置，记为 A' (或 A^T, A^t)

$A^T \quad A^t$

矩阵的加法

定义 (矩阵的加法)

加法运算, 若

对于两个行列数相等的矩阵, 我们可以进行

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B_{m \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

那么矩阵A与B的和定义为A与B的 (i, j) 元分别相加, 即

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵的数量乘法

定义 (矩阵的数乘) 一个数可以和矩阵相乘，即对于实数 c 和矩阵

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$(a_{ij})_{m \times n}$

$(c a_{ij})_{m \times n}$

两者相乘即将 A 的每一个元素乘以 c ，即

$$cA = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & \dots & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & \dots & c \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & c \cdot a_{m2} & \dots & c \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵的初等行变换

定义 (矩阵的初等行变换)

我们称如下针对矩阵的操作

(1) 把一行的倍数加到另一行上 ;

(2) 互换两行的位置 ;

(3) 用一个非零数乘以一行

为矩阵的初等行变换。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -4 & 1 & -2 \\ 9 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{1} \cdot 2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 12 \\ 9 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}, \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 9 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 12 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{\textcircled{1} \cdot \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 9 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

矩阵的初等列变换

定义 (矩阵的初等列变换)

我们称如下针对矩阵的操作

(1) 把一列的倍数加到另一列上 ; $\xrightarrow{\textcircled{1} + \textcircled{2} \cdot \frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\textcircled{1} + \textcircled{2} \cdot \frac{1}{2}}$

(2) 互换两列的位置 ; $\xrightarrow{(\textcircled{1} \textcircled{2})}$

(3) 用一个非零数乘以一列 $\xrightarrow{\textcircled{1} \cdot c}$

为矩阵的初等列变换。

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -4 & 1 & -2 \\ 9 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{1} \cdot 1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -4 & -3 & -2 \\ 9 & 7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\textcircled{1} \textcircled{2})} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -3 & -4 & -2 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\textcircled{1} \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & -4 & -2 \\ -7 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

矩阵分块

定义 (矩阵分块) 为了研究行数、列数较高的矩阵，常常对矩阵采用分块的方法，即用一些横线和纵线将它分划成若干个子块（它们当然都是子矩阵），以这些子块为元素的矩阵就称为分块矩阵。

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ \hdashline & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right] = A_{12} \quad \text{Aug}$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ \hdashline & & & & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

增广矩阵

二阶行列式

行列式 2f.

定义 (二阶行列式) 为

对于一个 2×2 的方阵, 我们可以定义其行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



称为二阶行列式。

3/27

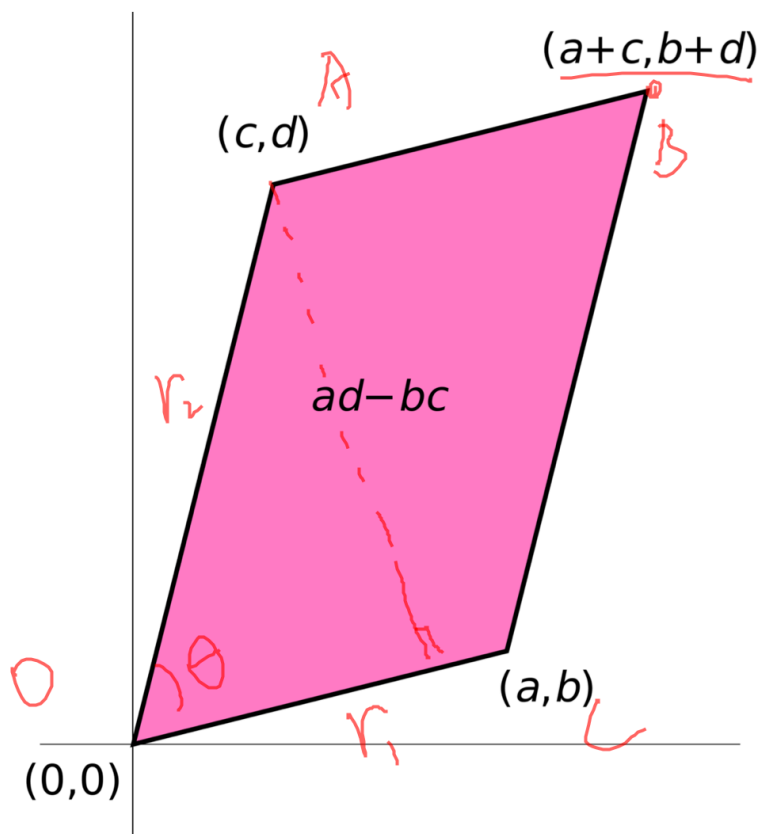
mxn m+n A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|$$

二阶行列式

$$\underline{a, b \quad c, d > 0}$$



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$|R^2: (a, b) + (c, d)|$$

$$(r_1, r_2, \sin \theta)$$

$$S_{\square OACB} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

图片来自: <https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant>

三阶行列式

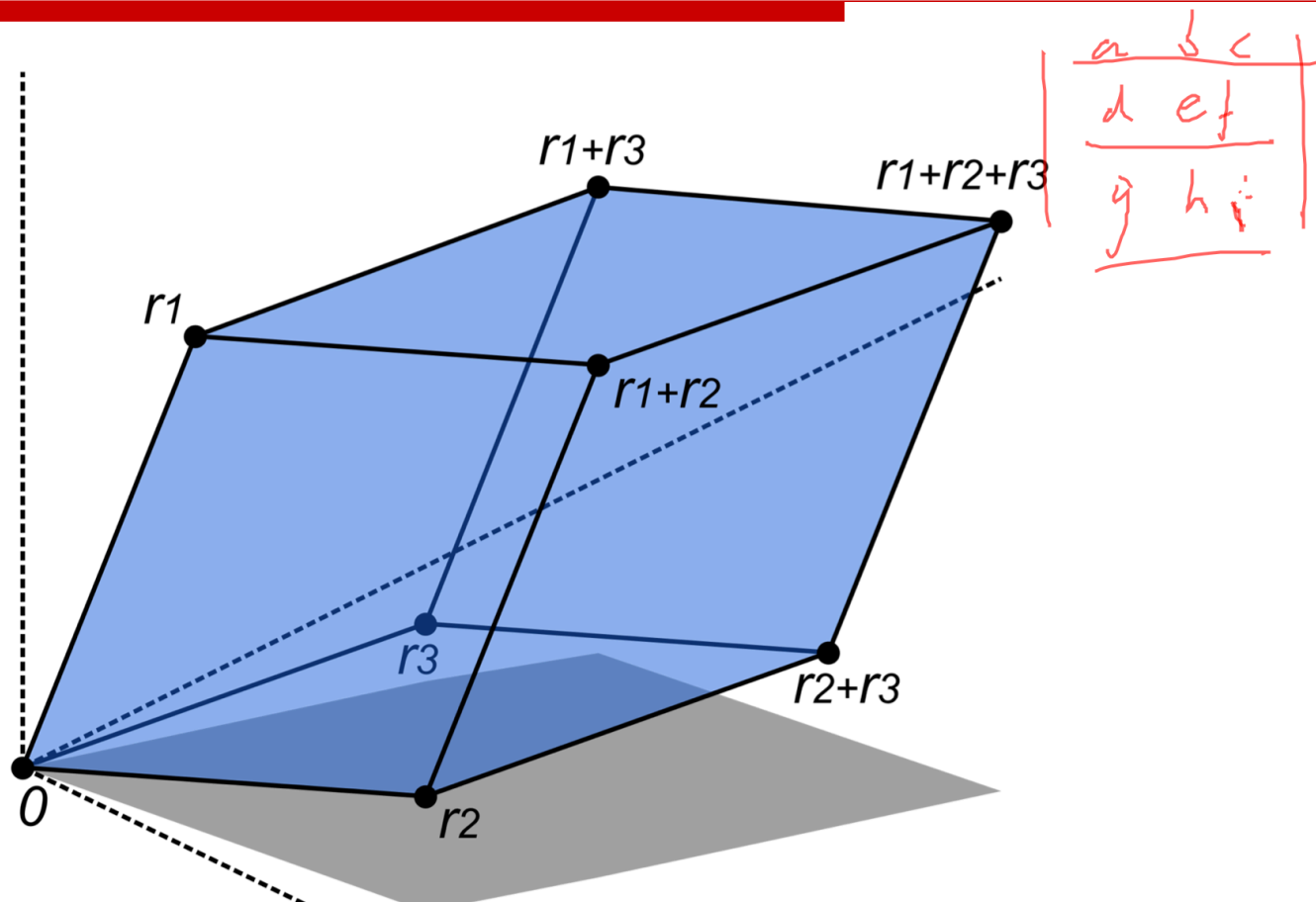
定义 (三阶行列式) 对于一个 3×3 的方阵，我们可以定义其行列式为

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

三阶行列式



图片来自: <https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant>

行列式的定义

determinant

a_{ij} 第 i

定义 (行列式, Laplace expansion) n 阶行列式是定义在 n 阶方阵上的一个运算, 在 n 阶行列式中, 划去第 i 行第 j 列, 剩下的元素按照原来的次序组成一个 $n-1$ 阶行列式称为 (i, j) 元的余子式, 记为 M_{ij} , 令

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称 A_{ij} 是 (i, j) 元的代数余子式。那么 n 阶行列式 $|A|$ 等于它的第 i 行元素与自己代数余子式的乘积之和, 即

a_{ij} 第 j

$$\det(A) = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

按行展开

行列式

- 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = |A|$$

上三角行列式

上三角矩阵

$$\begin{aligned}
 |A| &= a_{44} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= a_{44} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} \cdot a_{33} \\
 &= a_{44} \cdot a_{33} \cdot a_{22} \cdot a_{11}
 \end{aligned}$$

特殊矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ ~~$|A|$~~

$n \times n$

$$|A| = a_{nn} |A_{n-1}|$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$|A_{n-1}|$

$$|A_n| = a_{nn} |A_{n-1}|$$

$$\frac{|A_n|}{|A_{n-1}|} = a_{nn}$$

$$\begin{aligned} |A_n| &= a_{nn} a_{n-1, n-1} \dots a_{11} |A_1| \\ &= a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \end{aligned}$$

上三角行列式的值 =

$n-1$ 到 $n-1$ 列

主对角线元素

$$|A_{11}|$$

特殊矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对角矩阵

$$= \frac{a_{11} a_{22} \dots a_{nn}}{1}$$

特殊矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \vdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{|A_n|}{|A_{n-1}|} &= a_n (-1)^{n+1} \\ |A_n| &= \prod_{i=1}^n a_i (-1)^{3+ \dots + n+1} \\ &= (-1)^{\frac{(n+1)(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

$$3 + \dots + n+1 = \frac{(3+n+1)(n-1)}{2} = \frac{(n+4)(n-1)}{2}$$

$$\begin{aligned} &= a_n (-1)^{n+1} |A_{n-1}| = |A_n| \\ \frac{|A_n|}{|A_{n-1}|} &= a_n (-1)^{n+1} \\ \frac{|A_{n-1}|}{|A_{n-2}|} &= a_{n-1} (-1)^n \\ &\vdots \\ \frac{|A_2|}{|A_1|} &= a_2 (-1)^3 \end{aligned}$$

行列式的性质

1. 行列式行列互换，行列式值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$n=1$ ✓

$(a_{ij})_{n \times n} = (a_{ji})_{n \times n}$

$$A = (a_{ij})_{n \times n} \quad A^T = (a_{ji})_{n \times n}$$

$(n \times n)$

$$\underline{\underline{|A| = |A^T|}}$$

行列式按列展开

定义 (行列式 , Laplace expansion , 按列展开) n 阶行列式 $|A|$ 等于它的第 j 列元素与自己代数余子式的乘积之和 , 即

$$\det(A) = |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

$|A|$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

行列式的性质

2. 行列式一行的公因子可以提出去，即

注

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\sum_j k a_{ij} A_{ij}$$

$$k \sum_j a_{ij} A_{ij}$$

$$cA \quad c a_{ij}$$

$$\frac{|cA|}{c} = |A|$$

$$c^n |A|$$

行列式的性质

3. 行列式中若~~有~~某一行是两个数组的和，那么此行列式等于两个行列式的和，这两个行列式的这一行分别是第一个数组和第二个数组，其余行和原来的行列式的相应各行相同，即

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \underline{b_1 + c_1} & \underline{b_2 + c_2} & \dots & \underline{b_n + c_n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix} \quad (\text{第 } i \text{ 行})$$

$$= \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 b_1 & b_2 & \dots & b_n \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 c_1 & c_2 & \dots & c_n \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}$$

$$\sum (b_i + c_i) A_{ij}$$

$$\sum \quad \quad \quad \sum$$

行列式的性质

4. 两行互换，行列式反号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(第*i*行)
(第*k*行)

行列式的性质

5. 两行相同，行列式值为0，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \text{ (第 } i \text{ 行)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \text{ (第 } k \text{ 行)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = -|A| = 0$$

$$\cancel{A} \rightarrow$$

行列式的性质

6. 两行成比例，行列式值为0，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & \text{(第 } i \text{ 行)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \textcircled{l}a_{i1} & \textcircled{l}a_{i2} & \cdots & la_{in} & \text{(第 } k \text{ 行)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

行列式的性质

7. 把一行的倍数加到另一行上，行列式值不变，即

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{k1} + la_{i1} & a_{k2} + la_{i2} & \dots & a_{kn} + la_{in} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}$$

(第*i*行)

(第*k*行)

= 0

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 la_{i1} & la_{i2} & \dots & la_{in} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}$$



行列式的性质

8. n 阶行列式 $|A|$ 的第 i 行元素与第 k 行($k \neq i$)相应元素的代数余子式的乘积之和为0。即当 $k \neq i$ 时, 有 $1 \ a_{1k} \ a_{2k} \ \dots$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0$$

对列展开也有相同的性质。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} i'j \\ k'j \end{matrix} \quad \begin{matrix} a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \quad \begin{matrix} i'j \\ k'j \end{matrix}$$

$$\tilde{A}_{k'j} = A_{k'j}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{A}_{k'j} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{k'j} = 0$$

行列式

• 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -4 & 1 & -2 \\ 9 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

① · 2 + ②

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 12 \\ 9 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= -5 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 12 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 9 & -2 \end{vmatrix}$

$= -5(6 - 63) - 12(-4 + 27)$

行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -203 & 300 & 105 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -20-3 & 30+0 & 10+5 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -200 & 300 & 100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\
 \overset{11}{=} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -9 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 12$$

行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的计算

$$\begin{aligned}
 & I(a_1 \dots a_n) \begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n - b \end{vmatrix} \\
 & + (-b) I(a_2 \dots a_n) = a_1 \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 - b & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & \dots & a_n - b \end{vmatrix} - b I(a_1 \dots a_n) \\
 & = a_1 \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & -b & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & -b & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -b \end{vmatrix} - b I(a_1 \dots a_n) = \frac{a_1 (-b)^{n-1} - b I(a_1 \dots a_n)}{(-1)^{n-1} b^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^n a_i - b \right)
 \end{aligned}$$

行列式的计算

n阶范德蒙(Vandermonde)行列式

$$n=3 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$

$n \geq 2$ 时

$$\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

行列式按k行展开

定理 (Laplace) n 阶行列式 $|A|$ 中任意取定 k 行 k 列($1 \leq k \leq n$)，位于这些行和列交叉处的 k^2 个元素按照原来的排法构成 k 阶行列式称为 $|A|$ 的一个 k 阶子式，如果取定第 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 行($i_1 < i_2 < \dots < i_k$)，取定 $j_1, j_2, \dots, j_k$ 列($j_1 < j_2 < \dots < j_k$)，则所得的 k 阶子式为

$$A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_k \\ j_1, j_2, \dots, j_k \end{pmatrix}$$

划去子式所在的第 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 行， $j_1, j_2, \dots, j_k$ 列，剩下的元素按照原来的排法组成 $(n-k)$ 阶行列式，称为上述子式的余子式，在它的前面乘以 $(-1)^{(i_1+i_2+\dots+i_k)+(j_1+j_2+\dots+j_k)}$ ，则称为上述子式的代数余子式。

$$i, j \quad (-1)^{i+j}$$

行列式按k行展开

e.g.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix}$$

$(1 \times 2 + 4 \times 3)$

(-1)

代数余子式

$$C_k = (-1)^{k+j} M_{kj}$$

行列式按k行展开

定理 (Laplace) n 阶行列式 $|A|$ 中取定 k 行：第 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 行($i_1 < i_2 < \dots < i_k$ 且 $1 \leq k < n$)，则这 k 行元素形成的所有 k 阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于 $|A|$ 。类似地可以定义行列式的按 k 列展开。

$$|A| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k}$$

全阶

行列式的计算

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ C & A_2 \end{vmatrix}, \text{其中 } A_1, A_2 \text{ 是方阵}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & \dots & c_{1k} & b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ c_{r1} & \dots & c_{rk} & b_{r1} & \dots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_C \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{A_2}$

$$\stackrel{2(1+\dots+k)}{=} (A_1) \underline{(C-1)} (A_2)$$

$$= \underline{|A_1| |A_2|}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = |A_1| |A_2|$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & \dots & \dots \\ A_2 & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ A_n & \dots & \dots \end{vmatrix} = \underline{|A_1| \dots |A_n|}$$

行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & 85 & 1 & 2 & 0 \\ 29 & 73 & 0 & 3 & 4 \\ 19 & 67 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 37 & 85 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 154$$

要点回顾

- 矩阵

定义

特殊的矩阵：上三角、下三角、对角

操作：初等行列变换，矩阵分块

- 行列式

递归定义：行列式按一行展开

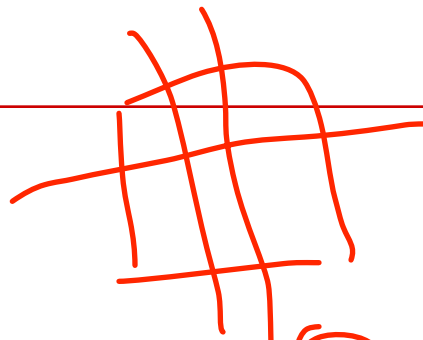
行列式按k行展开

- 行列式的性质

行列对称、与初等行变换之间的关系

- 范德蒙行列式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ x & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$



Handwritten notes on the right side of the slide:

- $10 - 2 + (2) \rightarrow \text{不变}$
- $(10, 10) \rightarrow (1, 1)$
- $10 - 6 \rightarrow C$

$$|A^T| = |A|$$

我们在这里

□ 问题答疑：

<http://www.xxwenda.com/>

■ 可邀请老师或者其他人回答问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop



法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



n元线性方程组

定义 (n元线性方程组)

含 n 个未知量的线性方程组称为 n 元

线性方程组，它的一般形式是：

[illegible]

其中， $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{sn}$ 是系数， $b_1, b_2, \dots, b_s$ 是常数项，常数项一般写在等号的右边。

对于线性方程组，如果 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 分别用数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 代入后，每个方程组都变成恒等式，那么称n元有序实数组 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 是原线性方程组的一个解，方程组所有的解称为方程组的解集。

n元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

(2) + (1) · (-3)

(3) + (1)

(4) + (1) · (-2)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ -5x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_2 + 5x_3 = 12 \\ x_1 - x_3 = -3 \end{cases}$$

$$-5x_2 - x_3 = 3$$

$$-2x_2 + 5x_3 = 12$$

$$x_1 - x_3 = -3$$

(2) (4) →

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -3 \\ -2x_2 + 5x_3 = 12 \\ -5x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

(5) + (2) · 2

(4) + (2) · 5

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_3 = 6 \\ -6x_3 = -12 \end{cases}$$

→ ... →

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

n元线性方程组

本质来讲，我们只对方程的系数和常数项进行了计算，所以对于一个线性方程组我们可以只写出它的系数和常数项，并按照原来的顺序排成一张表，这张表称为线性方程组的**增广矩阵**，只列出系数的表称为**系数矩阵**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & -5 & 4 & 10 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

增广矩阵

系数矩阵

n元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & -5 & 4 & 10 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{2} + \textcircled{1} \cdot (-3) \\ \textcircled{3} + \textcircled{1} \\ \textcircled{4} + \textcircled{1} \cdot (-2) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{2} \cdot (-1/5) \\ \textcircled{3} + \textcircled{2} \cdot 2 \\ \textcircled{4} + \textcircled{2} \cdot 1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/5 & -3/5 \\ 0 & -2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{3} \cdot 6 + \textcircled{4} \\ \textcircled{2} + \textcircled{3} \\ \textcircled{1} + \textcircled{2} \cdot (-1) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

n元线性方程组

从上述求解过程中，我们对线性方程组的增广矩阵实施了如下三种变换：

- (1) 把一行的倍数加到另一行上
- (2) 互换两行的位置
- (3) 用一个非零数乘以某一行

这就是我们之前提到过的矩阵的初等行变换。

在求解过程中，我们把增广矩阵经过初等行变换变成了如右图所示矩阵。我们称这种矩阵为阶梯形矩阵。它的特点是：

- (1) 元素全为零的行（零行）全在下方
- (2) 元素不全为零的行（非零行），从左起第一个不为零的元素（主元），它的列指标随行指标增大而增大。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

n元线性方程组

我们对阶梯形矩阵继续进行初等行变换，直到化成下述矩阵：
我们称这种矩阵为简化行阶梯形矩阵。它的特点是：

- (1) 是阶梯形矩阵
- (2) 每个非零行主元都是1
- (3) 每个主元所在的列其余元素都是零

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{yields}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Handwritten annotations: Red circles around the pivot elements 1, 1, and 3 in the first matrix, and 1, 1, and 1 in the second matrix. Red arrows indicate row operations: Row 2 - Row 1, Row 3 - 3*Row 2, and Row 1 - 3*Row 2. Red 'x' marks are above the columns in the second matrix.

可以证明：任何一个矩阵都能经过一系列初等行变换化成阶梯形矩阵，并且能进一步用初等行变换化成简化行阶梯形矩阵。

n元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\textcircled{2} + \textcircled{1} \cdot (-1) \\ \textcircled{3} + \textcircled{1} \cdot (-2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{2} \cdot (-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} + \textcircled{2} \cdot (-5)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$0 = -2$. 原线性方程组无解.

n元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(2) + (1) \cdot (-1) \\ (3) + (1) \cdot (-2)}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1) \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3) + (2) \cdot \frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1) + (2) \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

解 无穷多解
解 无穷多解

n元线性方程组

上一个题目中最后一个简化行阶梯形矩阵表示的线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

这个方程组有无穷多个解，我们可以用下列表达式来表示

主元 $\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases} \rightarrow$ 自由未知量。

这个表达式被称为原线性方程组的一般解，其中以主元为系数的未知量 x_1, x_3 被称为主变量， x_2 被称为自由未知量。

n元线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

惟一解

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

无解

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

无穷多解

n 个未知数 S 个方程

$$0 = 0$$

r 个非零行

$$r \leq S$$

$$r \leq n$$

$n+1$ 个方程

n元线性方程组

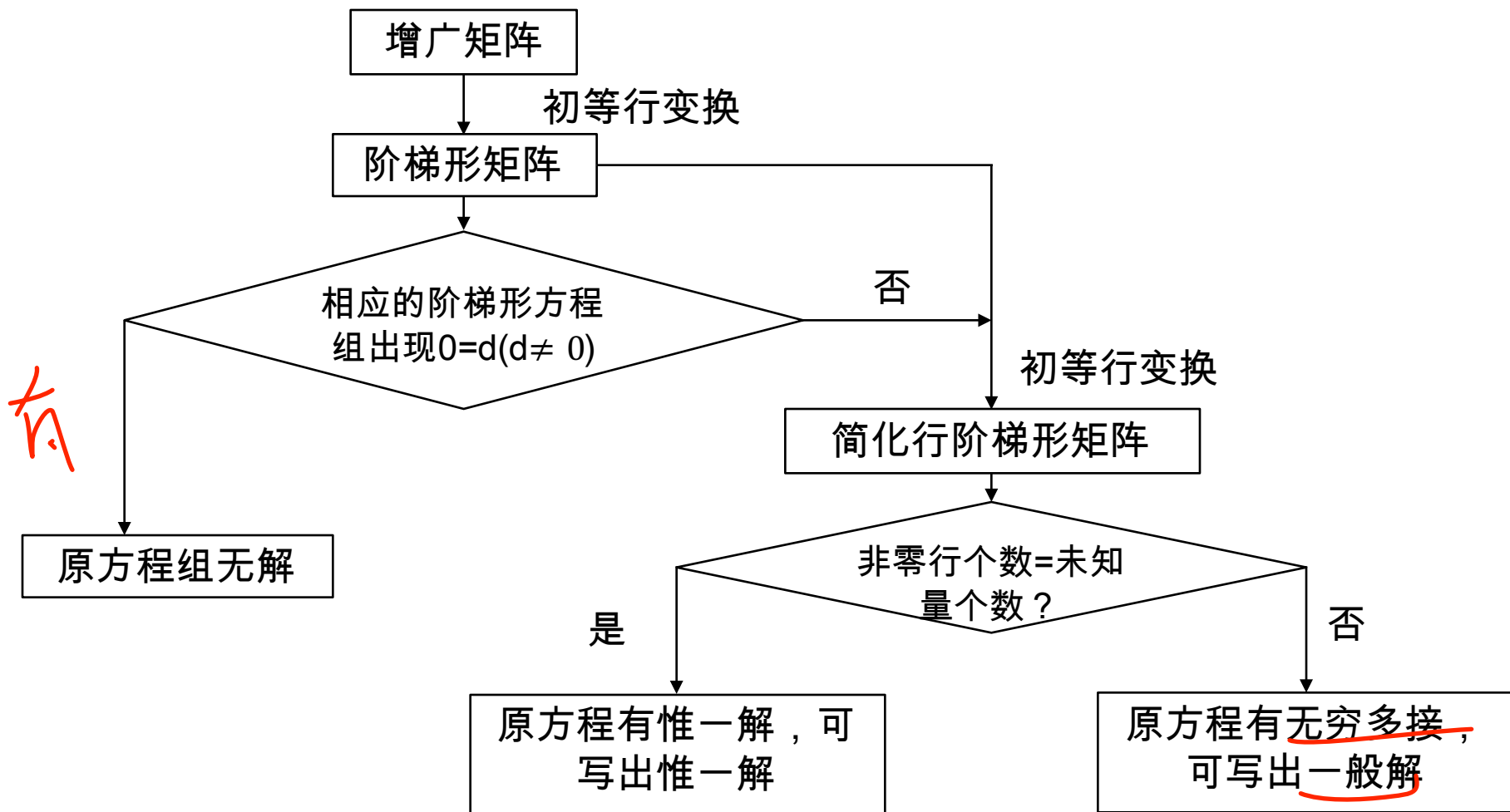
定理 n 元线性方程组的解只有三种情况：无解，有惟一解，有无穷多个解。把 n 元线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵，如果相应的阶梯形方程组出现“ $0=d$ (d 是非零数)”的情况，则原方程组无解；否则，有解。当有解时，如果阶梯形矩阵的非零行数 r 等于未知量个数 n ，则原方程组有惟一解；如果非零行个数 $r < n$ ，则原方程组有无穷多个解。

$$r > n \quad \times$$

如果一个线性方程组有解，则称它是相容的；否则，称它是不相容的。

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_1 = 5 \end{cases} \quad 0 = 1$$

高斯-约当算法



n元齐次线性方程组

定义 (n 元齐次线性方程组) 如果 n 元线性方程组中每一个方程的常数项都是0，则称这样的方程组为 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

显然， $(0, 0, \dots, 0)$ 是齐次线性方程组的一个解，称为**零解**，任何一个齐次线性方程组都有零解。如果一个齐次线性方程组除了零解之外还有其他解，则称其他解为**非零解**。显然，如果一个齐次线性方程组有非零解，那么它一定有无穷多个解。

n元齐次线性方程组

- n元齐次线性方程组有非零解的充要条件是：它的系数矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵中，非零行的个数 $r < n$ 。
- n元齐次线性方程组如果方程的个数 $s < n$ ，那么它一定有非零解。

$$r \leq s < n \Rightarrow r < n \Rightarrow \text{有非零解}$$

n个方程的n元线性方程组

在n元线性方程组中，若方程个数 $s=n$ ，则方程的系数矩阵是方阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

系数矩阵用 A 表示，增广矩阵用 $\tilde{A}$ 表示。那么根据行列式的性质有：

如果 $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} J$ ，则 $|J| = l|A|$ (其中 $l \neq 0$)

- 如果 $|A| \neq 0$ ，则 $|J| \neq 0$ ，于是 J 没有零行，从而 J 一定是一个上三角矩阵。
- 如果 $|A| = 0$ ，则 J 必有零行。

$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ $r < n$ 无解
 $r = n$ 有解

Cramer 法则

定理 n 个方程的 n 元线性方程组，如果它的系数行列式 $|A| \neq 0$ ，则它有惟一解，如果它的系数行列式 $|A| = 0$ ，则它有无穷多个解或者无解。当它有惟一解的时候，这个解是

$$\left(\frac{|B_1|}{|A|}, \frac{|B_2|}{|A|}, \dots, \frac{|B_n|}{|A|} \right)$$

其中

$$|B_j| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, j = 1, 2, \dots, n$$

要点回顾

- 线性方程组一般理论

解的情况

无解, 惟一解, 无穷多解

- 增广矩阵化成阶梯形矩阵

r 和 n 的关系

- 齐次线性方程组解得情况

无穷多解, 惟一解 (零解)

- n 个方程的 n 元线性方程组

Cramer法则

$|A| = 0?$

ex:
$$\begin{array}{r} 0 = d, d \neq 0 \\ \hline r < n \rightarrow \text{无穷} \\ r = n \rightarrow \text{惟一解} \end{array}$$

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{惟一解}$

我们在这里

□ 问题答疑：

<http://www.xxwenda.com/>

■ 可邀请老师或者其他人回答问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop



法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



n维向量空间

定义 (n维向量空间)

对于数域K 设n是一个给定正整数，

令

$$K^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in K, i = 1, 2, \dots, n\}$$

K^n 中的两个元素 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ， $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 相等，如果他们满足：

$$a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

K^n 中的元素用小写的希腊字母 α, β, γ ...表示。

定义加法运算：

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \triangleq (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

定义K中的元素与 K^n 中的元素的乘法为：

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) \triangleq (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

$$ka_i \in K.$$

n维向量空间

$\mathbb{R}^n$

K^n

向量 数量

定义 (n维向量空间)

对于任意的 $\alpha, \beta, \gamma \in K^n$, $k, l \in K$ 有

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ 交换律

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ 结合律

(3) 存在零元素为 $(0, 0, \dots, 0)$

(4) 存在负元素, 对于 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$-\alpha = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$$

我们有 $\alpha + (-\alpha) = 0$, 称 $-\alpha$ 是负元素。

(5) $1\alpha = \alpha$ 1 是乘法的单位元

(6) $(kl)\alpha = k(l\alpha)$ 结合律

(7) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$ 分配律 1

(8) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$ 分配律 2

$0 + \alpha = \alpha$

“加法的单位元”

$2 + (-2) = 0$
 -2

n维向量空间

定义 (n维向量空间)

定义 (n 维向量空间) 对于数域 K 上所有的 n 元有序数组组成的集合 K^n ，连同定义在上面的加法运算和数量乘法运算及其满足的 8 条运算法则在一起，称为数域 K 上的一个 n 维向量空间， K^n 中的元素称为 n 维向量；设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，称 a_i 为 α 的第 i 个分量。

- 行向量
- 列向量
- 从向量组的角度看待矩阵

线性表出

定义 (线性表出)

在 K^n 中 , 给定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 给

定 K 中任何一个数组 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 我们把 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$ 称为
向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个线性组合 , 把 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 称为系数。对于

$\beta \in K^n$ 如果存在 K 中的一组数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$$

则称 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出。

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$$

$$(1, 1)$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \beta$$

β 5% 由 2.1 - 2.5 倍 11 倍 2.5

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} - & \text{S} & \text{J} \\ \vdots & & \\ \text{S} & \text{W} & \end{bmatrix} \quad \text{A} \quad \text{B}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \alpha_1$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \underline{a}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{5n} \end{bmatrix} = \alpha_n$$

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = \beta$$

$\alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = 1$
 有解 $\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{Q} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可表

线性表出

结论 数域K上的线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 有解

$\Leftrightarrow K$ 中存在一组数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 使得下式成立

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta$$

$\Leftrightarrow \beta$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出

无解 $\Leftrightarrow \beta$ 不能由 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表出

线性表出

在 K^3 中，设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \alpha_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix} \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

判断 β 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出，如果能，写出一种表出方式。

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} x_3 = 1 & x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$\beta = \alpha_1 + \alpha_3$

(1, 0, 1)

线性相关与线性无关

定义 (线性相关) 在 K^n 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 称为线性相关的 ,
如果有 K 中不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

定义 (线性无关) 在 K^n 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 称为线性无关的 ,
如果从

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

可以推出 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 全为零。

$P \Rightarrow Q$
 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ 是

真

线性相关与线性无关

- 包含0向量的向量组一定线性相关
- 单个向量线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$
- 单个向量线性无关 $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$
- 在 K^n 中的向量组

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \varepsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

是线性无关的

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & = 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_s & & \\ k\alpha & = & 0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \\ k_1 k_2 \dots k_n \quad \leftarrow \text{不全为0} \\ k_1 \varepsilon_1 + \dots + k_n \varepsilon_n = 0 \\ \left[\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{array} \right] = 0 \end{array}$$

线性相关与线性无关

1. 从线性组合看

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 他们有系数不全为零的线性组合等于零向量

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ 他们只有系数全为零的线性组合等于零向量

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

线性相关与线性无关

2. 从线性表出看

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 至少有一个向量可以由其余向量线性表出

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ 每一个向量都不能由其余向量线性表出

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_1 - \alpha_{i-1} \\ \alpha_i &= \alpha_{i-1} - \alpha_{i-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 \alpha_1 + \dots + k_s \alpha_s &= 0 \\ k_i \alpha_i &= - \sum_{j \neq i} k_j \alpha_j \\ \alpha_i &= - \sum_{j \neq i} \frac{k_j}{k_i} \alpha_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &\Rightarrow Q \\ Q &\Rightarrow P \end{aligned}$$

线性相关与线性无关

3. 从齐次线性方程组看

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow \underline{k_1}\alpha_1 + \underline{k_2}\alpha_2 + \dots + \underline{k_s}\alpha_s = 0$ 有非零解

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

$\Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ 只有零解

$$x_1\alpha_1 + \dots + x_s\alpha_s = 0$$

$k_1 - k_2$ 非零解

线性相关与线性无关

4. 从 ~~齐次线性方程组~~ $\{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \}$ 行向量.

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

$\Leftrightarrow n$ 个 n 维列 (行) 向量组成的矩阵的 行列式等于零

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

$\Leftrightarrow n$ 个 n 维列 (行) 向量组成的矩阵的 行列式不等于零

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = A$$

$$|A| = 0$$

$$|A^T| = |A|$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A^T$$

线性相关与线性无关

性质1 如果一个向量组的一个部分组线性相关，则整个向量组也线性相关。如果向量组线性无关，则它的任何一个部分组也线性无关。

$\alpha_1, \dots, \alpha_t, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_s$

线性相关

不全为0的 $k_1, \dots, k_t$

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_t\alpha_t = 0$$

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_t\alpha_t + 0\alpha_{t+1} + \dots + 0\alpha_s = 0$$



线性相关与线性无关

性质2 如果一个向量组线性无关，则它的延伸组也线性无关。

// 如果一个向量组线性相关，则它的缩短组也线性相关。

延伸组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \quad \tilde{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} \quad \tilde{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_1 \tilde{\alpha}_1 + \lambda_2 \tilde{\alpha}_2 + \lambda_3 \tilde{\alpha}_3 = 0$$

线性相关与线性表出

定理 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关，那么 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关。同理， β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性无关。

$$\Rightarrow \beta = a_1\alpha_1 + \dots + a_s\alpha_s - \beta = 0$$
$$\Leftarrow k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s + k\beta = 0$$
$$k = 0$$

向量组的秩

定义 (极大线性无关组)

K^n 中的向量组的一个部分组称为一个极大线性无关组，如果这个部分组本身是线性无关的，但是如果从这个向量组的其余向量（如果还有的话）中任取一个添加进去，得到的新的部分组都线性相关。

$$\begin{array}{c} K^n \quad U \supseteq W \\ \beta \quad U \setminus W \quad \xrightarrow{\quad} \quad \underline{\alpha_1 \dots \alpha_s} \quad \beta \end{array}$$

向量组的秩

定义 (向量组等价) 在 K^n 中 , 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的每一个向量都可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性表出 , 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性表出。如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 可以互相线性表出 , 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 等价 , 记为

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\} \cong \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$$

- 反身性
- 对称性
- 传递性

$$\begin{aligned} \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} &\cong \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} \\ \{\beta_1, \dots, \beta_r\} &\cong \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \\ \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} &\cong \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\} \end{aligned}$$

向量组的秩

性质1 向量组与它的极大线性无关组等价。

性质2 向量组的任意两个极大线性无关组等价。

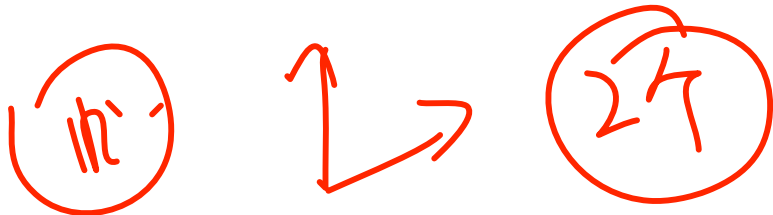
$$\left\{ \frac{\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_j}{\alpha_j \alpha_1 \dots \alpha_k} \right\}$$
$$(1) \cong \alpha \dots \cong (1)$$
$$[7] \approx [7]$$

α_1
 α_2
 α_3
 α_4
 α_5
 α_6
 α_7
 α_8
 α_9
 α_{10}
 α_{11}
 α_{12}
 α_{13}
 α_{14}
 α_{15}
 α_{16}
 α_{17}
 α_{18}
 α_{19}
 α_{20}
 α_{21}
 α_{22}
 α_{23}
 α_{24}
 α_{25}
 α_{26}
 α_{27}
 α_{28}
 α_{29}
 α_{30}
 α_{31}
 α_{32}
 α_{33}
 α_{34}
 α_{35}
 α_{36}
 α_{37}
 α_{38}
 α_{39}
 α_{40}
 α_{41}
 α_{42}
 α_{43}
 α_{44}
 α_{45}
 α_{46}
 α_{47}
 α_{48}
 α_{49}
 α_{50}
 α_{51}
 α_{52}
 α_{53}
 α_{54}
 α_{55}
 α_{56}
 α_{57}
 α_{58}
 α_{59}
 α_{60}
 α_{61}
 α_{62}
 α_{63}
 α_{64}
 α_{65}
 α_{66}
 α_{67}
 α_{68}
 α_{69}
 α_{70}
 α_{71}
 α_{72}
 α_{73}
 α_{74}
 α_{75}
 α_{76}
 α_{77}
 α_{78}
 α_{79}
 α_{80}
 α_{81}
 α_{82}
 α_{83}
 α_{84}
 α_{85}
 α_{86}
 α_{87}
 α_{88}
 α_{89}
 α_{90}
 α_{91}
 α_{92}
 α_{93}
 α_{94}
 α_{95}
 α_{96}
 α_{97}
 α_{98}
 α_{99}
 α_{100}

向量组的秩

Q：向量组的任意两个极大线性无关组所含向量的个数是否不同？

-> ~~向量组的任意两个极大线性无关组所含的向量的个数相同。~~



向量组的秩

(7)

(7)

引理1 设向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出。如果 $r > s$, 那么向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性相关。

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{s1}\alpha_s \\ \vdots \\ \beta_r = a_{1r}\alpha_1 + \dots + a_{sr}\alpha_s \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rs}x_s = 0 \end{cases}$$

$$x_1\beta_1 + \dots + x_r\beta_r = 0$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r)\alpha_1 + \dots + (a_{s1}x_1 + \dots + a_{sr}x_r)\alpha_s = 0$$

Sg r > s

向量组的秩

引理1 设向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出。如果 $r > s$, 那么向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性相关。

$\Rightarrow$ 设向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出。如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关, 那么 $r \leq s$ 。

$\Rightarrow$ 等价的线性无关向量组所含的向量的个数相等。✓

$\Rightarrow$ 向量组的任意两个极大线性无关组所含的向量个数相等。

$$\beta_1 \cdots \beta_r \text{ 线性无关} \cong \alpha_1 \cdots \alpha_s \text{ 线性无关}$$
$$r \leq s \quad \text{or} \quad s \leq r \quad \text{or} \quad s = r$$

向量组的秩

定义 (向量组的秩)

向量组的极大线性无关组所含的向量

的个数称为这个向量组的秩。全部由零向量组成的向量组的秩规定为

0。向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩记为 $\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ 。

$$r \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \}$$

向量组的秩

定理 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组是自身

$\Leftrightarrow \text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} = s.$

向量组的秩

定理 向量组A可以由向量组B线性表出，则 $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(B)$ 。显然
等价向量组具有相同的秩。

$A \approx B$
 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是 A 的一个极大线性无关组
 $\beta_1, \dots, \beta_r$ 是 B 的一个极大线性无关组
 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 可被 $\beta_1, \dots, \beta_r$ 线性表出
秩相等
 $s \leq r$
 $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(B)$

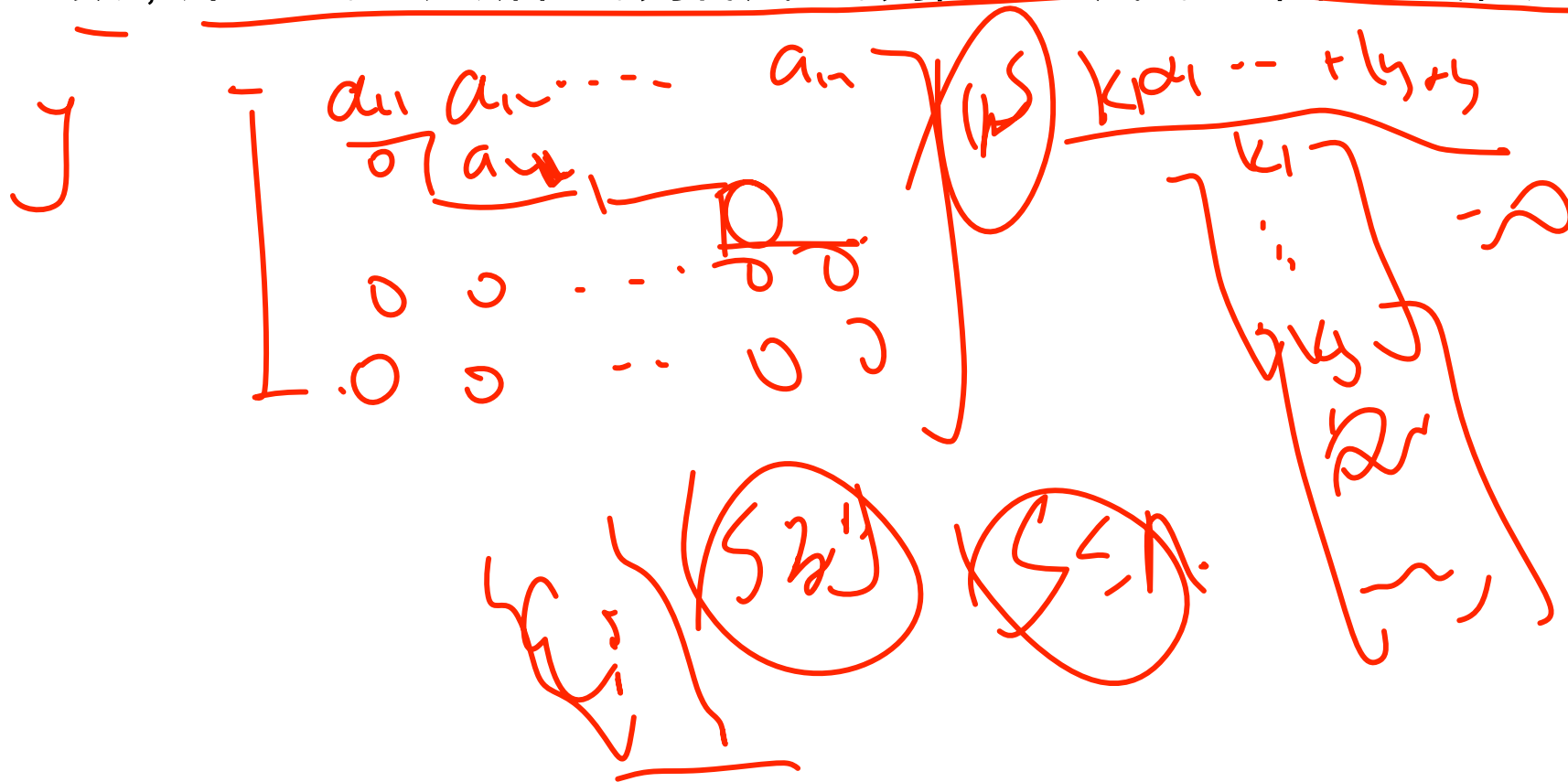
矩阵的秩

定义（矩阵的秩）

我们称矩阵的行向量组的秩为行秩，列向量组的秩为列秩。可以证明，矩阵的行秩等于列秩，统称矩阵的秩。记矩阵A的秩为 $\text{rank}(A)$ 。

矩阵的秩

引理1 阶梯形矩阵J的行秩与列秩相等，他们都等于J的非零行的个数；并且J的主元所在的列构成J的列向量组成的一个极大线性无关组。



矩阵的秩

引理2 矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩。

$A \quad r_1 \dots r_s$

$(i) \times k + (j)$

$\rightarrow B$

$r_1 \dots r_i$

$r_j + r_i \cdot k \dots r_s$

$(i) \times (-k) + (j) \rightarrow$

矩阵的秩

引理3 矩阵的初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性，从而不改变矩阵的列秩。

$$\textcircled{1} \quad C \xrightarrow{\text{初等行变换}} D$$

$$C: \eta_1, \dots, \eta_n$$

C 列线性相关 $\Leftrightarrow$ D 列线性相关

$$D: f_1, \dots, f_n$$

$$x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + \dots + x_n \eta_n = 0$$

同解

$$C: x_1 f_1 + \dots + x_n f_n = 0$$

$$D: j_1, j_2, \dots, j_r$$

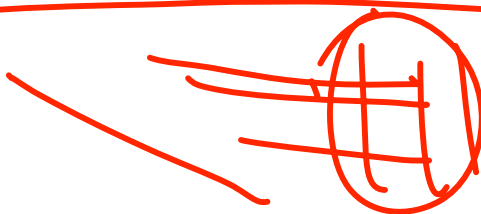
$$j_1, j_2, \dots, j_r \text{ 是 } C \text{ 的列秩}$$

矩阵的秩

引理4 任意矩阵的行秩等于列秩。

矩阵的秩

性质1 矩阵A经过初等行变换化成简化行阶梯形矩阵J，则A的秩等于J的非零行的个数。设J的主元所在的列是第 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 列，则A的第 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 列构成A的列向量组的一个极大线性无关组。



矩阵的秩

性质2 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A')$

$$r(A) = \text{列数} = A' \text{的行数} = r(A')$$

矩阵的秩

性质3 矩阵的初等行变换和初等列变换都不改变矩阵的秩。

$A \rightarrow B$

$A' \rightarrow B'$

矩阵的秩

性质4 任意非零矩阵的秩等于它的非零子式的最高阶数。

$S \times n$ A $r(A) = r$
 $i_1 \dots i_r$ 行线性无关 A 的 r 阶子式
 $\alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_r}$

$r(A_1) = r$
 A_1 有 r 列线性无关
 $j_1 j_2 \dots j_r$ 列线性无关
 r 阶子式 $r(A) = r$
 A_2 r 阶子式 $r(A) = r$
 $S \times n, m > r$
 $A \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}$
 $|A| \neq 0$
 $| = 0$

矩阵的秩

性质5 一个 n 级矩阵 A 的秩等于 n 当且仅当 $|A| \neq 0$. 如果一个方阵的秩等于它的级数, 那么称这个方阵为满秩矩阵。

线性方程组有解的充要条件

定理 (线性方程组有解判别定理)

线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

有解的充分必要条件是：它的系数矩阵 A 与其增广矩阵 $\tilde{A}$ 具有相同的秩。

$$r(A) = r(\tilde{A})$$

$\Rightarrow$ 有解 $\left(\begin{array}{c} \beta \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \end{array} \right)$ 线性表示 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$

$\Leftarrow$ $\left(\begin{array}{c} \alpha_1 \cdots \alpha_n \\ \beta \end{array} \right)$ 有解

线性方程组有解的充要条件

定理 线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

有解时，如果它的系数矩阵A的秩等于未知量的个数n，则方程组有惟一解；如果A的秩小于n，则方程有无穷多个解。

秩为n $\Rightarrow$ 惟一解
秩 < n $\Rightarrow$ 无穷多个解
 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A)$

线性方程组有解的充要条件

定理 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是：它的系数矩阵的秩小于未知量的个数。

$$\frac{\text{非零行} \uparrow m < n}{\parallel} \\ \text{rank}(A)$$

线性方程组有解的充要条件

例 判断下述齐次线性方程组有没有非零解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 0 \\ a^3x_1 + b^3x_2 + c^3x_3 = 0 \end{cases}$$

其中a, b, c两两不等。

A:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(A) = 3$: 非零解(0)
没有非零解.

齐次线性方程组的解集结构

定义 数域K上的n元齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

的解是一个K上的n元有序数组，从而它是 K^n 中的一个向量，称为方程组的一个解向量，所有解向量构成的集合称为解集W。

$$W = \{0\}$$
$$W = \{ ? \}$$

- 设 $\gamma, \delta \in W, k \in K$ ，那么有 $\gamma + \delta \in W, k\gamma \in W$

$$\gamma + \delta = (r_1 + f_1, r_2 + f_2, \dots, r_n + f_n)$$
$$(kr_1, kr_2, \dots, kr_n)$$

齐次线性方程组的解集结构

定义 K^n 上的一个非空子集 U 如果满足条件：

1. $\gamma, \delta \in U \rightarrow \gamma + \delta \in U$

2. $\gamma \in U, k \in K \rightarrow k\gamma \in U$

则称 U 是 K^n 的一个线性子空间，简称子空间。

$$|r^2| \geq |r^2|$$

从上述对于解集 W 的描述中，我们可以看出 W 是 K^n 的一个子空间，称为解空间。

齐次线性方程组的解集结构

定义 数域K上的n元齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0 \quad (1)$$

有非零解时，如果存在它的有限多个解： $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 满足

(1) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关

(2) 方程组的每一个解都可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性表出，

则称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是齐次线性方程组(1)的一个基础解系。

如果(1)的一个基础解系为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ ，那么它的解集W为：

$$W = \{k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t \mid k_i \in K, i = 1, 2, \dots, t\}$$

解集W的代表元素

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$$

称为齐次线性方程(1)的通解。

W

> 组大线性无关

齐次线性方程组的解集结构

定理 数域K上的n元齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0 \quad (1)$$

的系数矩阵A的秩小于未知量个数n时，它一定有基础解系；并且它的每一个基础解系所含的解向量的个数为 $n - \text{rank}(A)$ 。

$r = \text{rank}(A) < n$
 $A \rightarrow J$ r 个主元, $n-r$ 个自由变量

$x_1 \cdots x_r$ 主元 $x_{r+1} \cdots x_n$ 自由变量

$$x_1 = -b_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{1n}x_n$$

$$\vdots$$

$$x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{rn}x_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -b_{1,r+1} & \cdots & -b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -b_{r,r+1} & \cdots & -b_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{1n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -b_{2,r+1} \\ \vdots \\ -b_{2n} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \eta_{n-r}$$

齐次线性方程组的解集结构

例 求下述齐次线性方程组的一个基础解系，并写出解集。

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

初行 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(x_3, x_4) = (1, 0)$

$(x_3, x_4) = (0, 1)$

$\eta_1 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\eta_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$W = \{ k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R} \}$

$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

4-4 自由
变量为 1 其
余为 0

η_1, η_2 是一个基础解系。

非齐次线性方程组的解集结构

定义 我们把数域K上的n元齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0 \quad (1)$$

称为非齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta \quad (2)$$

的一个导出组。那么显然有如下性质：

- (2) 的两个解之差为 (1) 的解
- (2) 的一个解与 (1) 的一个解之和是 (2) 的一个解。

$\gamma - \delta = 0$

非齐次线性方程组的解集结构

定理 数域K上的n元非齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta \quad (2)$$

有解，则它的解集为

$$U = \{\gamma_0 + \eta \mid \eta \in W\}$$

其中 γ_0 是非齐次线性方程组(2)的一个解（称为特解），W是方程组(2)的导出组(1)的解集。

$$\begin{aligned} \gamma_0 + \eta &\in U \quad \eta \in W \\ \{\gamma_0 + \eta \mid \eta \in W\} &\subseteq U \\ \gamma_0 &\in U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma - \gamma_0 &\in W \\ \exists \eta \in W \\ \gamma - \gamma_0 &= \eta \\ \gamma &\in \gamma_0 + W \\ U &\subseteq \{\gamma_0 + \eta \mid \eta \in W\} \end{aligned}$$

非齐次线性方程组的解集结构

例 求下述非齐次线性方程组的解集。

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -7 \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -2 \end{cases}$$

齐次线性方程组

解法

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \end{cases}$$

$$\eta_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\eta_0 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\eta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{14}{5} \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 - \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$W = \{ \eta_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R} \}$$

基

定义 (子空间的基) 设 U 是 K^n 的一个线性子空间, U 中的向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 如果满足:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

(2) U 中的每一个向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出。

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为 U 的一个基。

因此如果 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是齐次线性方程组(1)的一个基础解系,

那么 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是解空间 W 的一个基。

$$W = \{ k_1 \eta_1 + \dots + k_s \eta_s \mid \dots \}$$

基

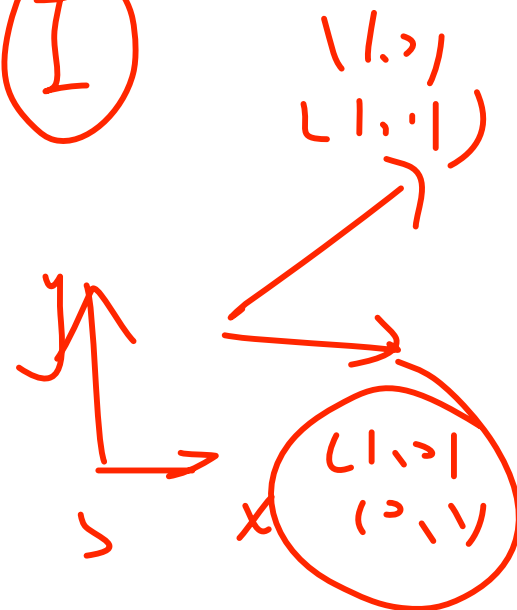
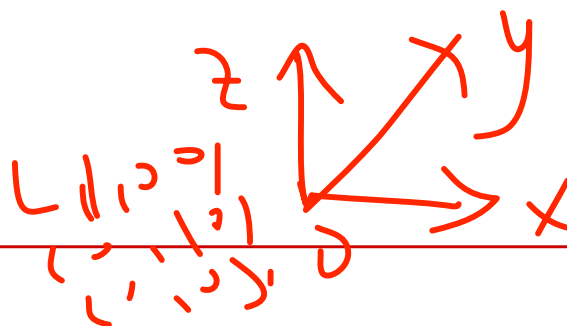
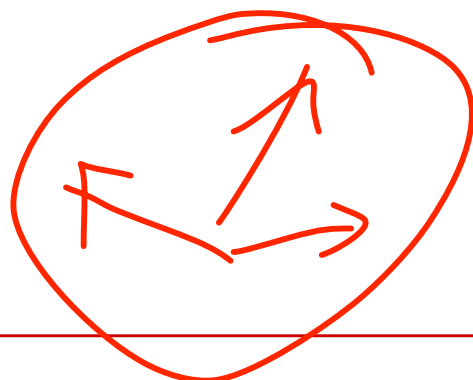
e.g.

1. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是空间 K^n 的一个基，称为 K^n 的标准基。

三维空间中，取任意三个不共面的向量都可以构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。

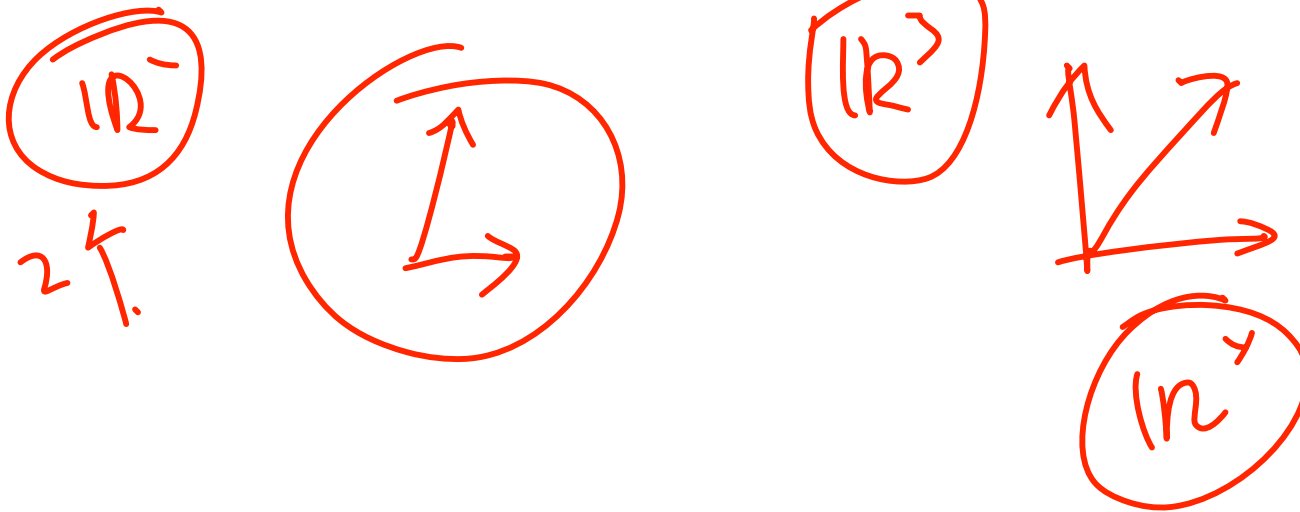
ε_i 的第 i 个分量是 1，其余分量是 0 的 n 维向量

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I$$



基

结论 K^n 的任何一个非零子空间 U 都有一组基，并且可以证明从 U 的任何一个非零向量出发，可以扩充成 U 的一个基。



基

定理

相等。

K^n 的一个非零子空间 U 的任意两个基所含的向量个数

U $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ S
 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ T

维数

dimension

定义 (维数)

U 是 K^n 的一个非零子空间, U 的一个基所含向量的个数称为 U 的维数, 记为 $\dim U$ 。零子空间的维数规定为 0。显然

$\dim K^n = n$ 。

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$\{0\}$
 (127) (147) 127 127

维数

推论 数域K上的n元齐次线性方程组有非零解时，它的解空间W的每一个基所含的向量的个数为 $n - \text{rank}(A)$ ，其中A是方程的系数矩阵，因此解空间W的维数为

W

$$\dim W = n - \text{rank}(A)$$

维数

定义 (坐标)

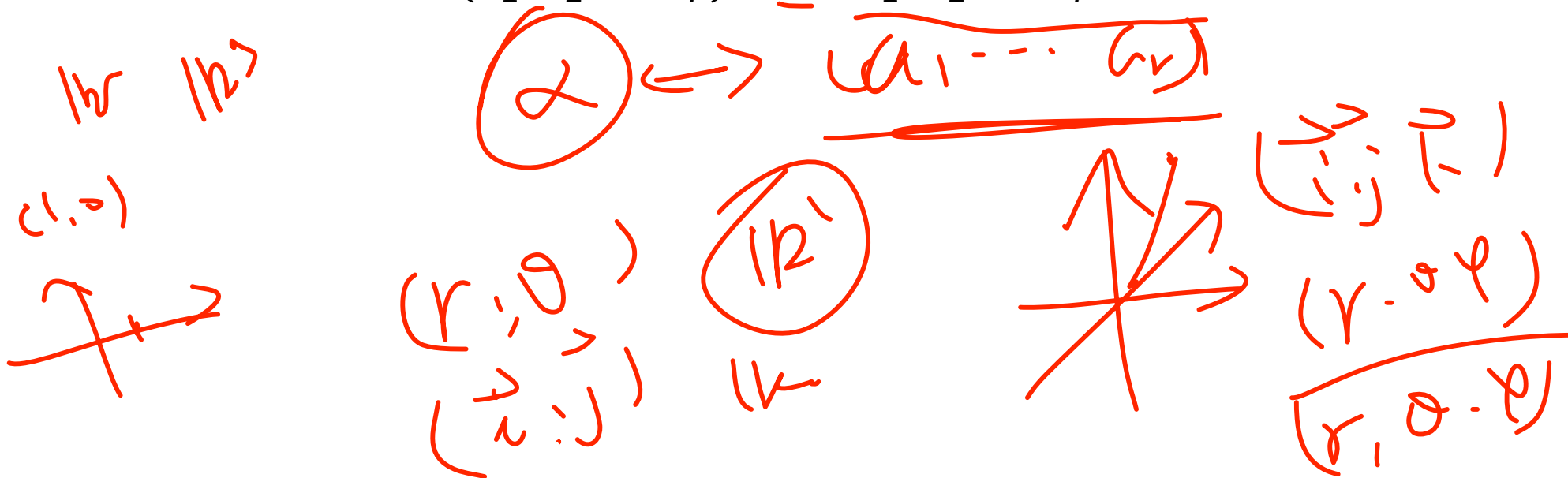
如果知道了子空间 U 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$,

那么 U 中的每一个向量 α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出, 并且表出方式是惟一的:

$$\alpha = \underline{a_1} \alpha_1 + \underline{a_2} \alpha_2 + \dots + \underline{a_r} \alpha_r$$

$$b_i = a_i, i=1, \dots, r$$

我们称有序实数组 $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ 为 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 下的坐标。



维数

定义 (向量组生成的子空间)
量组 , 令

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 K^n 的一个向

$$U = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \mid k_1, k_2, \dots, k_s \in K\}$$

显然 U 是 K^n 的一个子空间 , 我们把 U 称为由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 生成的子空间 ,
记为 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rangle$

$$W = \{k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_s\eta_s\}$$
$$W = \langle \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s \rangle$$

维数

定理 K^n 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组是子空间 $U = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rangle$ 的一个基，从而

$$\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} = \text{dim} \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rangle$$

即向量组的秩等于其生成子空间的维数。

~~r 对 n 的递归~~ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

உதவி
பெறுமா?

$$u = \underline{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$$
$$r_k$$

行色词

① $\text{dir } \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j$

217 洞

$V_{Stn.} \downarrow \downarrow \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$

2)



维数

推论 ~~矩阵的行空间维数等于列空间维数。~~

Handwritten red annotations illustrating the relationship between matrix dimensions and rank:

- A horizontal line is drawn above the text k^n .
- The text k^n is written in the center.
- The text k^s is written to the right of k^n .
- The text d_{s+n} is written to the left of k^n .
- The text $d_r =$ is written below k^n .
- A diagonal line is drawn from the bottom left to the top right, passing through the text $d_r =$.

要点回顾

- 向量组的秩

向量组的极大线性无关组

- 矩阵的秩

$\text{rank}(A) = \text{极大线性无关组} = \text{阶梯形矩阵非零行的个数} = \text{非零子式的最高阶数}$

- 秩与方程组的解

$\text{rank}(\text{系数矩阵}) = \text{rank}(\text{增广矩阵})$

$\text{rank}(\text{系数矩阵}) = \text{未知量个数}$

- 维数

空间的秩

向量组的秩 = 向量组张成空间的维数

我们在这里

□ 问题答疑：

<http://www.xxwenda.com/>

■ 可邀请老师或者其他人回答问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop



法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



矩阵的乘法

定义 (矩阵的乘法) 设 $A = (a_{ij})_{s \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$, 令

$$C = (c_{ij})_{s \times m}$$

其中

$$c_{ij} = \underline{a_{i1}} \underline{b_{1j}} + \underline{a_{i2}} \underline{b_{2j}} + \cdots + \underline{a_{in}} \underline{b_{nj}} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$i = 1, 2, \dots, s \quad j = 1, 2, \dots, m$$

则矩阵C称为矩阵A与B的乘积, 记为 $C=AB$

矩阵的乘法

$$A_{s \times n} \cdot B_{n \times r} = C_{s \times r}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

- 只有左边矩阵的列数与右边矩阵的行数相同才能做乘积。
- c_{ij} 等于A的第i行乘以B的第j列。 $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = c_{ij}$
- 乘积矩阵的行数等于左矩阵的行数，乘积矩阵的列数等于右矩阵的列数。

$$A_{s \times n} B_{n \times m} C_{m \times r} = D_{s \times r}$$

矩阵的乘法

求AB: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -9 \\ 12 & 21 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

$(1, -2) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$(1, -2) \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$(0, 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$(-1, 2) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

矩阵的乘法

已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, 求 BC , $A(BC)$, $(AB)C$

$$BC = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -21 & 18 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} -8 & -9 \\ 18 & 21 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -21 & 18 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$$

$A(BC) = (AB)C$
结合律

矩阵的乘法

1. 矩阵的乘法适用于结合律, 设 $A = (a_{ij})_{s \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$, $C = (c_{ij})_{m \times r}$

则

$$\begin{aligned}
 & \text{Handwritten notes: } i, j \text{ circled; } s \times r \text{ and } s \times r. \text{ above } (AB)C = A(BC); \text{ a grid diagram with arrows indicating row and column indices.} \\
 & [(AB)C]_{(i,j)} = \sum_{l=1}^m [(AB)_{(i,l)}] c_{lj} = \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} \\
 & [A(BC)]_{(i,j)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} [(BC)_{(k,j)}] = \\
 & = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{l=1}^m b_{kl} c_{lj} \right)
 \end{aligned}$$

矩阵的乘法

2. 矩阵的乘法适用于左分配律，即

$BA \neq AB$

$$\underline{A(B + C)} = \underline{AB + AC}$$

也适用于右分配律

$$\underline{(B + C)D} = \underline{BD + CD}$$

$$\begin{aligned} A(B + C)D &= (AB + AC)D \\ &= \underline{ABD + ACD} \end{aligned}$$

矩阵的乘法

3. 主对角线元素都是1，其余元素为0的n级矩阵称为n级单位矩阵，记为 I_n ，简记为 I 。如果 A 是n级矩阵，那么

$$IA = AI = A$$

Handwritten notes illustrating the identity matrix I and its properties:

- A large matrix I_n is shown with 1s on the main diagonal and 0s elsewhere, enclosed in brackets. To its right, the text "n." is written.
- Below the large matrix, a 2×2 matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ is shown, labeled "2x".
- To the right of the 2×2 matrix, a 3×3 matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ is shown, labeled "3x".
- Below the 3×3 matrix, the text "n." is written.
- To the right of the matrices, the equation $Ia = a$ is written, with I circled.
- Below $Ia = a$, the equation I_n is written, with I_n circled.
- At the top right, a circled note says "k x n".

矩阵的乘法

4. 矩阵的乘法和数量的乘法满足关系

$$\underline{k(AB)} = (kA)B = A(kB)$$

矩阵的乘法

5. 矩阵的乘法不满足交换律

e.g. 不能运算，结果不同

$$A_{2 \times 3} \quad B_{3 \times 5} \quad \text{可以}$$

$$(AB)_{2 \times 5}$$

$$BA \text{ 不能运算}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 5}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{5 \times 1}$$

$$AB = (1, 1, 1, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

如果矩阵A, B满足 $AB=BA$ ，那么称A, B可交换。特别的，如果

A是n级矩阵，那么

$$(kI)A = A(kI)$$

即数量矩阵与任何矩阵可交换

矩阵的乘法

6. 从 $BA = 0$ 不能推出 $B = 0$ 或者 $A = 0$

e.g. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$AB = 0$ ✓
 $A \neq 0$ ✓
 $B \neq 0$ ✓

矩阵的乘法

7. $(A + B)' = A' + B'$

$(kA)' = kA'$

$(AB)' = B'A'$

$A = (a_{ij})_{s \times n}$ $B = (b_{ij})_{n \times m}$

$(AB)'$ $m \times s$

$B'A'$ $m \times s$
 $n \times m$ $n \times s$

$(AB)'(i,j) = (AB)(j,i)$

$= \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$

$(B'A')(i,j) = \sum_{k=1}^n B'(i,k) A'(k,j)$

$= \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk}$

$(ABC)' = (C'D)' = C'(AB)' = C'B'A'$ ✓

分块矩阵的乘法

定义 (分块矩阵的乘法)

设 $A = (a_{ij})_{s \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$ 将他们

进行分块, 写成

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_1 & n_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} \begin{matrix} m_1 & m_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

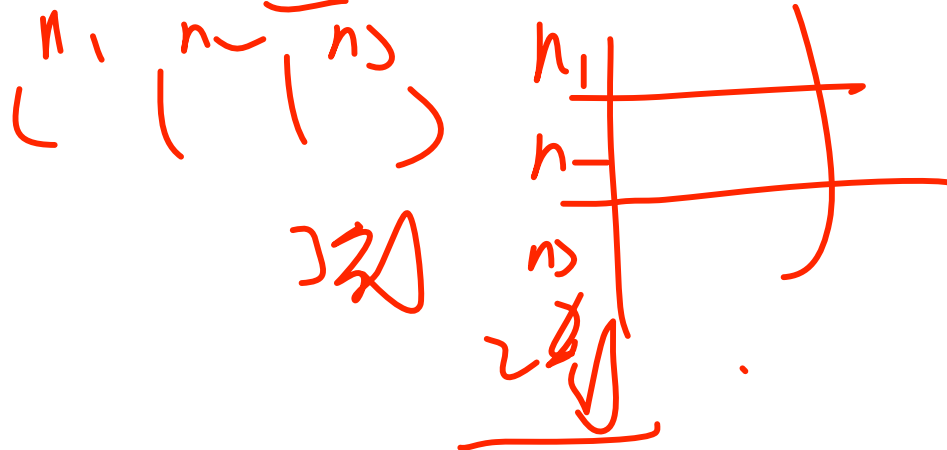
那么有

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

分块矩阵的乘法

$$AB = \begin{bmatrix} \underline{A_{11}B_{11}} + \underline{A_{12}B_{21}} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \underline{A_{21}B_{11}} + A_{22}B_{21} & \underline{A_{21}B_{12}} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

- 左矩阵的列组数等于右矩阵的行组数。
- 左矩阵每个列所含的列数等于右矩阵相应行所含的行数



分块矩阵的乘法

设 A 是 $s \times n$ 矩阵， B 是 $n \times m$ 矩阵， B 的列向量组为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ ，则

$$AB = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_m)$$

$$AB = A(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n) = (A\beta_1 \quad \dots \quad A\beta_n)$$

1 \times 1 1 \times n

分块矩阵的乘法

设A是 $s \times n$ 矩阵，B是 $n \times m$ 矩阵，A的行向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ，则

$$\underline{AB} = \begin{bmatrix} \alpha_1 B \\ \alpha_2 B \\ \vdots \\ \alpha_s B \end{bmatrix}$$

$s \times m$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix} \quad B$$

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \alpha_2 B \\ \vdots \\ \alpha_s B \end{pmatrix}$$

$s \times n \quad n \times m \quad 1 \times n$

$$s \times m$$

特殊矩阵

1. 对角矩阵：主对角线以外的元素全为零的方阵称为对角矩阵

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & d_n \end{bmatrix}$$

$$\text{diag} \{ d_1, d_2, \dots, d_n \}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 x_1 \\ d_2 x_2 \\ \vdots \\ d_s x_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \alpha_1 & & & \\ & d_2 \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \alpha_n \end{bmatrix}$$

$s \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{s \times n}$

行向量 $x_1, x_2, \dots, x_s$

列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

特殊矩阵

2. 上三角矩阵：主对角线下的元素全为零的方阵称为上三角矩阵。

两个上三角矩阵的乘积仍然是上三角矩阵。

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 + a_2 b_3 \\ 0 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

$n \times n$

矩阵

乘积对角线上的元素
是前两个矩阵对角线
上元素的积。

特殊矩阵

3. 基本矩阵：只有一个元素为1，其余元素均为0的矩阵称为基本矩阵。

(i,j)元为1的基本矩阵，记为 E_{ij}

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} E_{11} \\
 & A_{s \times n} \quad \text{行 } r_1 \dots r_s \\
 & \quad \quad \quad \text{列 } \alpha_1 \dots \alpha_n \\
 & E_{ij} A = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{r \times 1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}_{s \times n} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_s \end{bmatrix}_{r \times n} \\
 & \quad \quad \quad \text{行 } i \\
 & \quad \quad \quad \text{列 } j \\
 & A E_{ij} = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{bmatrix} 0 & \dots & \alpha_i & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \\
 & \quad \quad \quad \text{列 } i \\
 & \quad \quad \quad \text{行 } j
 \end{aligned}$$

特殊矩阵

4. 初等矩阵：由单位矩阵经过一个初等行（列）变换得到的矩阵称为初等矩阵。用初等矩阵左（右）乘一个矩阵A，就相当于对A作了一次相应的初等行（列）变换。

把 i 的 k 倍加到 j 行上

$$P(j, i(k))A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & k & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(j, i)$$
$$P(i, j)$$

证明

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ k r_i + r_j \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

特殊矩阵

5. 对称矩阵：如果矩阵满足 $A = A'$ ，称A为对称矩阵。

$$(a_{ij})_{n \times n} = A$$

$$A' = (a_{ji})_{n \times n}$$

$$\underline{a_{ij} = a_{ji}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

特殊矩阵

5. 反对称矩阵：如果矩阵满足 $A' = -A$ ，称 A 为反对称矩阵。

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$-A' = (-a_{ji})_{n \times n}$$

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

$$i=j \quad a_{ij}=0 \quad a_{ii}=0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{例1} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{例2} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

反对称

矩阵乘积的秩

定理 设 $A = (a_{ij})_{s \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$, 则

$$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$

A 列向量组 $\alpha_1 \dots \alpha_n$

$$AB = \underbrace{(\alpha_1 \dots \alpha_n)}_{\text{线性组合}} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \quad n \rightarrow m$$
$$= \left(b_{11}\alpha_1 + \dots + b_{n1}\alpha_n, b_{12}\alpha_1 + \dots + b_{n2}\alpha_n, \dots, \alpha_1 b_{1m} + \dots + \alpha_n b_{nm} \right)$$

矩阵乘积的秩

定理 设 $A = (a_{ij})_{s \times n}$, 则 $n \times s$

$$\text{rank}(A'A) = \text{rank}(AA') = \text{rank}(A)$$

$$A x = 0$$

$$\dim W = n - \text{rank}(A)$$

$$\begin{cases} A'A x = 0 \\ A x = 0 \end{cases}$$

同解

$$\text{若 } A x = 0 \Rightarrow \text{一定 } A'A x = 0$$

$$A y = 0$$

$$\{ A x = 0 \} \subseteq \{ A'A x = 0 \}$$

$$\subseteq$$

δ 是 $A'A x = 0$ 的解

$$\delta' A'A \delta = 0$$

$$(A \delta)' (A \delta) = 0$$

$$A \delta = 0$$

δ 也是 $A x = 0$

矩阵乘积的行列式

定理 设A, B都是n级矩阵, 则

$$|BA| = |AB| = |A||B|$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{3} (a_{11})$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{4} (a_{12})$$

$$\begin{array}{c} n=2. \\ \left| \begin{array}{cc|cc} A & 0 \\ -I & B \end{array} \right| = |A||B| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \left| \begin{array}{cc|cc} A & 0 \\ -I & B \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{array} \right| \\ \sim |A||B| \end{array}$$

可逆矩阵

定义 (可逆矩阵) 对于数域K上的矩阵A，如果存在数域K上的矩阵B，使得

$$AB = BA = I$$

则称A是一个可逆矩阵 (或者非奇异矩阵)。如果A是可逆矩阵，那么将符合上述式子的B称为A的逆矩阵，记为 A^{-1} 。

Handwritten example:

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{2} 1 \quad | \mathbb{R}$$
$$2 \cdot \textcircled{?} = 1$$

- 什么样的矩阵是可逆的？
- 如何求一个矩阵的逆矩阵？

可逆矩阵

定理 数域K上, n级矩阵A可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$.

" $\Rightarrow$ " $|AA^{-1}| = |I|$

$(|A|)(|A^{-1}|) = 1$

$\Rightarrow |A| \neq 0$

" $\Leftarrow$ "

$A = (a_{ij})_{n \times n}$

伴随矩阵 A^*

$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

A_{ij} A 中 a_{ij} 代数余子式

$AA^* = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A|I$

$AA^* = |A|I$

$A\left(\frac{A^*}{|A|}\right) = I$

可逆矩阵

定理 数域K上，n级矩阵A可逆的充分必要条件是A满秩，即
 $\text{rank}(A)=n$.



$$|A| \neq 0$$

$$Ax=0$$

只有零解

$$\dim W=0 = n - \text{rank}(A)$$

$$\text{rank}(A)=0$$

可逆矩阵

定理 数域 K 上， n 级矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A 的行（列）向量组线性无关。

→ A 的行向量组是 K^n 的一组基

可逆矩阵的性质

- 单位矩阵可逆，并且 $I^{-1} = I$

$$\frac{1}{1} = 1 \quad (I^{-1}) = I$$

- 如果A可逆，那么 A^{-1} 也可逆，并且 $(A^{-1})^{-1} = A$

$$IA = AA^{-1} = I$$
$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

可逆矩阵的性质

- 如果n级矩阵A,B都可逆，则AB也可逆，并且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI A^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

AB可逆. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

可逆矩阵的性质

- 如果n级矩阵A可逆，则A'也可逆，并且

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

$$\begin{aligned} (A') (A^{-1})' &= A' (A^{-1})' = (A^{-1} A)' = I' = I \\ (A^{-1})' (A') &= (A A^{-1})' = I. \end{aligned}$$

可逆矩阵的性质

- 可逆矩阵经过初等行变换化成的简化行阶梯形矩阵一定是单位矩阵。

$\Delta t = 0$

$\Delta t \neq 0$

已有了 Δt

非空子集 = n

n 个元素

$$A \xrightarrow{\sim} (n \times n)$$

$$n \times n$$

$$1 \times 1$$

可逆矩阵的性质

- 初等矩阵都可逆，并且它的逆矩阵是与其同类型的初等矩阵。

① $(j) + (i) \cdot k$

$$P(j, i(k)) P(j, i(k))^{-1} I = I$$

② $P(i, j)$

$$P(i, j) P(i, j) = I$$

③ $P(i, k)$

$$P(i, k) P(i, k) = I$$

可逆矩阵的性质

- 矩阵A可逆的充分必要条件是它可以表示成一些初等矩阵的乘积。

-> 用一个可逆矩阵去左(右)乘一个矩阵A, 不改变A的秩

$$P_i A = I$$

初等矩阵

$P_1 \dots P_t$ 左乘 A

初等矩阵

$$(P_t \dots P_2 P_1) A = I$$

B

$$BA = I$$

$$A^{-1} = P_t \dots P_1$$

$$A \cdot (A^{-1})^{-1} = (I + P_1)^{-1} \\ = P_1^{-1} P_2^{-1} \dots P_t^{-1}$$

$$\textcircled{B} A$$

$$P_1 \dots P_t A$$

初等行变换法求矩阵的逆

根据可逆矩阵的性质，我们知道如果存在初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_t$ 使得

$$(P_t \dots P_2 P_1)A = I$$

那么

$$A^{-1} = P_t \dots P_2 P_1$$

从而

$$P_t \dots P_2 P_1 I = A^{-1}$$

也就是说，如果我们用一系列的初等行变换将 A 化成 I ，那么同样的初等行变换就把 I 化成 A^{-1} ，即

$$(A, I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I, A^{-1})$$

$$(A, I)$$

$$(A, I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I, A^{-1})$$

初等行变换求矩阵的逆

设

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \times 3$$

求 A^{-1}

$$(A, I) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} + \textcircled{2} \cdot (-1) \\ \textcircled{2} + \textcircled{1} \cdot (-3) \\ \textcircled{3} + \textcircled{1} \cdot (-5) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} + \textcircled{2} \cdot (-1) \\ \textcircled{2} + \textcircled{1} \cdot (-3) \\ \textcircled{3} + \textcircled{1} \cdot (-5) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

初等行变换求矩阵的逆

设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

求解方程组 $AX = B$

$(A, B) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right]$

化简 $\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{24}{5} \end{array} \right]$

$A^{-1}(A^{-1})$
 $A^{-1}(A \cdot B)$
 $A^{-1} \cdot 1$
 $(A, B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} [I \mid A^{-1}B]$

正交矩阵

定义 (正交矩阵)

如果实数域上的方阵满足

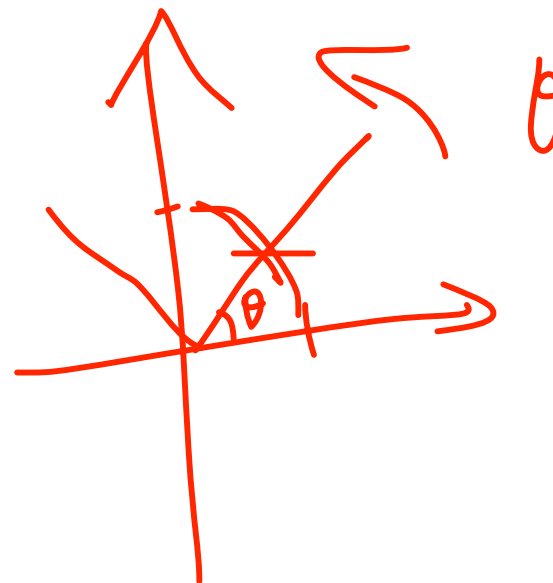
$$AA' = I$$

那么称A是正交矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$AA' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



正交矩阵

- A是正交矩阵，那么 $A^{-1} = A'$
- 如果A是正交矩阵，那么 A^{-1} (A') 也是正交矩阵
- 如果A是正交矩阵，那么 $|A| = 1$ 或者 -1
- 如果A, B都是正交矩阵，那么AB也是正交矩阵。

1) $AA' = I$
 $|A| = \pm 1$

$AA' = I$

#1

A B
 $AA' = I$ $BB' = I$

$(AB)(AB)' = ABB'A'$
 $= AIA' = I$

2)

3)

正交向量

定义 (标准内积) 在 $\mathbb{R}^n$ 中 , $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$,
规定

$$(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

这个二元实值函数被称为 $\mathbb{R}^n$ 的内积 , 通常称这个内积为 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积 ,
上述定义式也可以写成

$$(\alpha, \beta) = \alpha \beta'$$

容易得出标准内积具有下述性质

1. 对称性 $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
2. 线性性之一 $(\alpha + \gamma, \beta) = (\alpha, \beta) + (\gamma, \beta)$
3. 线性性之二 $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$
4. 正定性 $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\alpha = 0$

正交向量

定义 (欧氏空间) n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 有了标准内积之后，就称为一个欧几里得空间，又称为欧氏空间。在 $\mathbb{R}^n$ 中我们规定向量的长度为

$$|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

长度为1的向量称为单位向量。在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中，如果

$$(\alpha, \beta) = 0$$

则称 α, β 是正交的，记为 $\alpha \perp \beta$ 。

- 显然零向量与任何向量都正交
- 由非零向量组成的向量组如果其中每两个不同的向量都正交（即两两正交），则称它们是正交向量组。如果正交向量组每个向量都是单位向量，则称它为单位正交向量组。

正交向量

定义 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中，由非零向量组成的向量组如果其中每两个不同的向量都正交（即两两正交），则称它们是**正交向量组**。如果正交向量组每个向量都是单位向量，则称它为**单位正交向量组**。

- 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中，正交向量组一定是线性无关的。

$$\alpha_1 \dots \alpha_j \quad \overbrace{1 \dots j}^{\text{subscript}}$$

$$1 \cdot \alpha_1 + \dots + k_j \alpha_j = 0$$

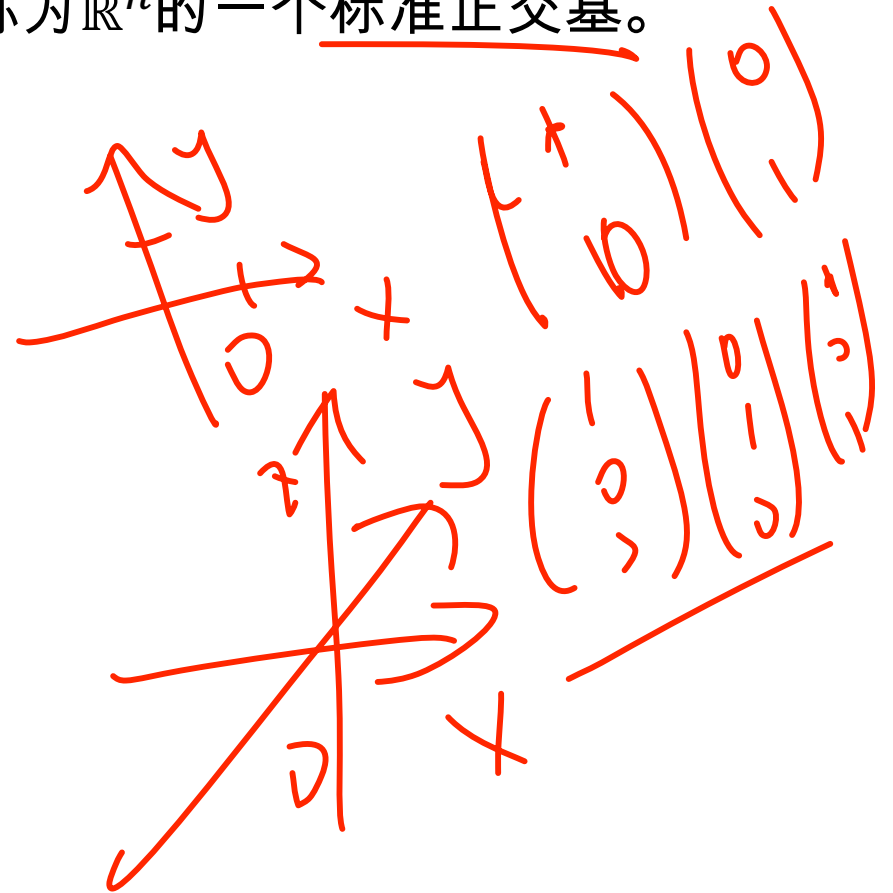
$$\frac{k_1(\alpha_1, \alpha_i)}{1} + \dots + \frac{k_i(\alpha_i, \alpha_i)}{k_i} + \dots + \frac{k_j(\alpha_j, \alpha_i)}{j-1} = 0$$

正交向量

定义 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中， n 个向量组成的正交向量组称为 $\mathbb{R}^n$ 的一个正交基， n 个单位向量组成的正交向量组称为 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基。

e.g. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{行}$$



正交向量

定理 实数域上 n 级矩阵 A 是正交矩阵的充分必要条件为： A 的行（列）向量组是欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基。

$$A \begin{pmatrix} r_1 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

$$AA^T = I$$
$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^T & \dots & r_n^T \end{pmatrix} = I$$
$$r_i r_j^T = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow r_1, \dots, r_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基

施密特正交化

Q : 如何从已有的一组基 (非正交) 构造一组标准正交基 ?

非正交基 -> 正交基 -> 标准正交基

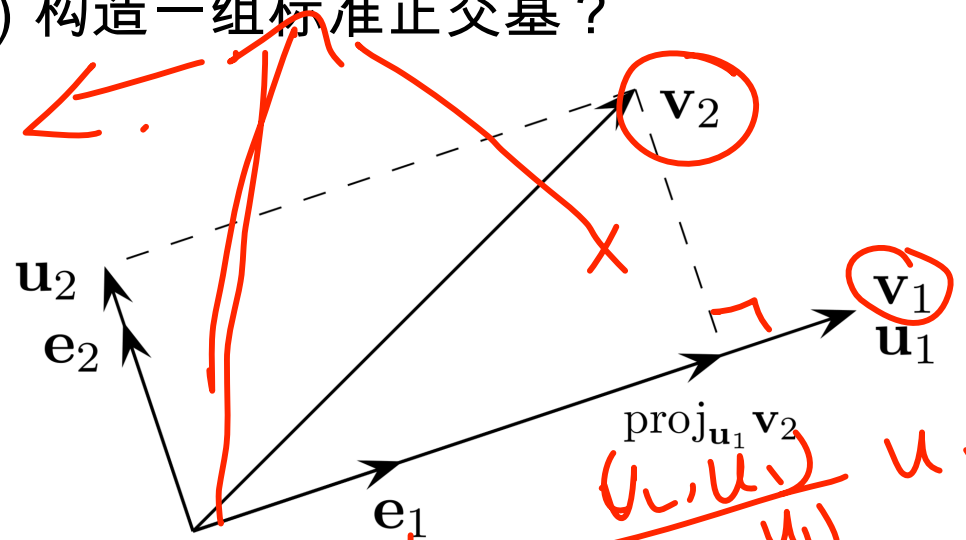


Diagram illustrating the orthogonal decomposition of a vector v_2 into components u_1 and u_2 . The vector v_2 is shown as the sum of u_1 and u_2 . The projection of v_2 onto u_1 is labeled $\text{proj}_{u_1} v_2$. The orthogonal component is labeled u_2 . The vectors u_1 and u_2 are shown as orthogonal. The diagram is labeled with u_1 , u_2 , v_2 , and the projection formula.

施密特正交化

定理 (Gram-Schmidt process) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性无关向量组，令

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \alpha_2 - P_{\beta_1}(\alpha_2)$$

.....

$$\beta_s = \alpha_s - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(\alpha_s, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)} \beta_j = \alpha_s - \sum_{j=1}^{s-1} P_{\beta_j}(\alpha_s)$$

施密特正交化

例：在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中，设向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

求与 α_1, α_2 等价的 正交单位向量组。

正交化

$\beta_1 = \alpha_1$

$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$

$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{2}{5} \alpha_1$

$\beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$

单位化

$\eta_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\eta_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

要点回顾

- 矩阵的乘法

乘法的定义，分块矩阵的乘法

- 矩阵乘积的秩与行列式 $|AB| = |A||B|$

- 特殊矩阵

乘以一个特殊矩阵 $\rightarrow$ 对矩阵进行相应的操作

- 矩阵的逆

可逆的充要条件

可逆矩阵的行（列）空间

初等行变换法求矩阵的逆

- 正交矩阵

正交矩阵的行（列）空间

施密特正交化方法

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{2} &= 1 \\ A A^{-1} &= I_{\mathbb{R}^n} \\ |A| &\neq 0 \\ (I, A) &\rightarrow (I, A^{-1}) \\ A A^T &= I. \end{aligned}$$

我们在这里

□ 问题答疑：

<http://www.xxwenda.com/>

■ 可邀请老师或者其他人回答问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop



法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



矩阵相似

定义 (矩阵相似) 设A,B都是数域K上的n级矩阵 , 如果存在数域K上的一个n级可逆矩阵U , 使得

$$U^{-1}AU = B$$

则称A与B是相似的 , 记为 $A \sim B$ 。

- 反身性、对称性、传递性->相似是一种等价关系

$$A \sim A \quad I^{-1} = I \quad I^{-1}AI = A$$

$$U^{-1}AU = B \rightarrow UB^{-1}U^{-1} = A$$

$$U^{-1} = T \quad T^{-1}BT = A$$

$$\underline{A \sim B \sim C}$$

$$C = T^{-1}BT \quad B = U^{-1}AU$$
$$C = T^{-1}U^{-1}AUT \quad P = UT$$

矩阵相似

- 相似矩阵具有相同的行列式
- 相似矩阵具有相同的秩
- 相似矩阵或者都可逆，或者都不可逆，当它们都可逆时，它们的逆矩阵也相似

$$\begin{aligned}U^{-1}AU &= B \\ |U^{-1}| |U| &= 1\end{aligned}$$

$$A \Leftrightarrow \forall k \neq k$$

$$\begin{aligned}A^{-1} \quad B^{-1} \\ U^{-1} A^{-1} U &= B^{-1} \\ \hline A^{-1} &\sim B^{-1}\end{aligned}$$

矩阵相似

定义 (迹) n 级矩阵~~A使得~~主对角线上元素的和称为A的迹，记为 $\text{tr}(A)$.

trace

显然矩阵的迹具有下述性质

- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- $\text{tr}(kA) = k\text{tr}(A)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

线性性质

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \\ \text{tr}(BA) &= \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} \end{aligned}$$

矩阵相似

- 相似矩阵的迹相等

$$A \sim B$$

$$U^{-1}AU = B$$

$$U \text{ 可逆}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(B) &= \text{tr}(U^{-1}AU) \\ &= \text{tr}(AUU^{-1}) \\ &= \text{tr}(A) \end{aligned}$$

行列式 ✓
特征值 ✓
迹 ★

相似标准形

矩阵相似的重要问题：

1. 矩阵A满足什么条件时能相似于一个对角矩阵？
2. 如果矩阵A能相似于一个对角矩阵，那么怎么求这个对角矩阵？

$$\begin{aligned} V^{-1}AV &= D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} & V &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \\ AV &= VD & A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)D \\ V &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) & A\alpha_i &= \lambda_i \alpha_i \quad i=1, \dots, n \\ & \text{(线性无关)} & & \end{aligned}$$

$\lambda_i \neq 0$
 $\lambda_i \neq 0$

相似标准形

定理 数域K上的n级矩阵A能够相似于对角矩阵的充分必要条件是：

K^n 中有n个线性无关的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，以及K中的n个数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，使得：

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \quad A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \quad \dots \quad A\alpha_n = \lambda_n\alpha_n$$

这时，令 $U = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ，则

$$U^{-1}AU = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

如果一个n级矩阵A能够相似于对角矩阵，则称A可对角化，把对角矩阵D称为A的相似标准形。

yzh

特征值与特征向量

定义 设A是数域K上的n级矩阵，如果 K^n 中有非零列向量 α ，使得

$$A\alpha = \lambda_0 \alpha$$

则称 λ_0 为A的一个特征值，称 α 是A属于特征值 λ_0 的一个特征向量。

- n级矩阵A能否对角化→矩阵A是否有n个线性无关的特征向量

定理 数域K上的n级矩阵A可对角化的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，此时令

$$U = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$U^{-1}AU = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

其中 λ_i 是 α_i 所属的特征值。

特征值与特征向量

定理 λ_0 为 A 的一个特征值， α 是 A 属于特征值 λ_0 的一个特征向量

$$\Leftrightarrow A\alpha = \lambda_0 \alpha, \alpha \neq 0, \lambda_0 \in K$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_0 I - A)\alpha = 0, \alpha \neq 0, \lambda_0 \in K$$

$$\Leftrightarrow \alpha \text{ 是齐次线性方程组 } (\lambda_0 I - A)X = 0 \text{ 的一个非零解, } \lambda_0 \in K$$

$$\Leftrightarrow |\lambda_0 I - A| = 0, \alpha \text{ 是 } (\lambda_0 I - A)X = 0 \text{ 的一个非零解, } \lambda_0 \in K$$

λ_0

因此，我们将 $|\lambda I - A|$ 称为矩阵 A 的特征多项式，可以证明

λ_0 为 A 的一个特征值， α 是 A 属于特征值 λ_0 的一个特征向量

$$\Leftrightarrow \lambda_0 \text{ 是 } A \text{ 的特征多项式 } |\lambda I - A| \text{ 在 } K \text{ 中的一个根, } \alpha \text{ 是齐次线性方程组 } (\lambda_0 I - A)X = 0 \text{ 的一个非零解。}$$

特征值与特征向量

计算A的全部特征值和特征向量的方法如下：

1. 计算A的特征多项式 $|\lambda I - A|$
2. 判别多项式 $|\lambda I - A|$ 在数域K中有没有根。如果没有，那么A没有特征值，从而也没有特征向量。如果 $|\lambda I - A|$ 在K中有根，则它在K中全部的根就是A的全部特征值，此时接着做第三步。
关于 λ 的方程
3. 对于A的每一个特征值 λ_j ，求齐次线性方程组 $(\lambda_j I - A)X = 0$ 的一个基础解系： ~~$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$~~ ，于是A的属于 λ_j 的全部特征向量组成的集合是

$$\{k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_t\eta_t \mid k_1, k_2, \dots, k_t \in K, \text{且它们不全为} 0\}$$
150

我们称齐次线性方程组 $(\lambda_j I - A)X = 0$ 的解空间为A的属于 λ_j 的特征子空间

150

特征值与特征向量

设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

是数域K上的矩阵，求A的全部特征值和特征向量。

$$\underline{(\lambda I - A)} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

两个根 $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X = 0$$

$x_1 = x_2$ $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X = 0$$

$x_1 = 2x_2$ $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

A属于 λ_1 的全部特征向量

$$\{ k\alpha_1 \mid k \in K, k \neq 0 \}$$

A属于 λ_2 的全部特征向量

$$\{ k\alpha_2 \mid k \in K, k \neq 0 \}$$

特征值与特征向量

设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

是数域K上的矩阵，求A的全部特征值和特征向量。

$$(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2 (\lambda + 6)$$

$$\lambda_1 = 3 \quad (2重) \quad \lambda_2 = -6$$

$$代 \lambda_1 = 3 \quad (I - A) X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$代 \lambda_2 = -6 \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$一般地 \quad x_1 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3$$

$$特征向量 \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

属于3的全部特征

$$A \text{ 是 } K \text{ 上 } n \times n \text{ 矩阵}$$

$$\{ k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 \mid k_1, k_2 \in K, (k_1, k_2) \neq (0, 0) \}$$

特征值与特征向量

- 相似矩阵具有相同的特征多项式
- 相似矩阵具有相同的特征值 (包含重数)

$$\begin{aligned} A \sim B & \quad U^{-1}AU = B \\ (\lambda I - B) &= \lambda I - U^{-1}AU \\ &= |U^{-1}(\lambda I - A)U| \\ &= |U^{-1}(\lambda I - A)| \\ &= |\lambda I - A| \end{aligned}$$

特征值与特征向量

- 如何判断数域 K 上的矩阵 A 有没有 n 个线性无关的特征向量？
-> 我们求出了 A 的所有特征值和特征向量之后（假设有 m 个特征向量），有没有办法判断这些特征向量放在一起是否线性无关？
-> A 的属于不同特征值的特征向量是否线性无关？

特征值与特征向量

$$A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1$$

定理 设 λ_1, λ_2 是数域 K 上的 n 级矩阵 A 的不同特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 是分别属于这两个特征值的线性无关的特征向量, 则

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关。

$$\begin{aligned} & k_1 \alpha_1 + \dots + k_s \alpha_s + l_1 \beta_1 + \dots + l_r \beta_r = 0 \\ & k_1 A\alpha_1 + \dots + k_s A\alpha_s + l_1 A\beta_1 + \dots + l_r A\beta_r = 0 \\ & \rightarrow k_1 \lambda_1 \alpha_1 + \dots + k_s \lambda_s \alpha_s + l_1 \lambda_1 \beta_1 + \dots + l_r \lambda_2 \beta_r = 0 \\ & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ & \rightarrow k_1 \lambda_1 \alpha_1 + \dots + l_s \lambda_2 \alpha_s + l_1 \lambda_1 \beta_1 + \dots + l_r \lambda_2 \beta_r = 0 \\ & \rightarrow k_1 \lambda_1 \alpha_1 + \dots + l_s \alpha_s = 0 \\ & \rightarrow k_1 \alpha_1 + \dots + l_s \alpha_s = 0 \\ & \Rightarrow k_1 = \dots = l_s = 0 \\ & l_1 \beta_1 + \dots + l_r \beta_r = 0 \\ & l_1 = \dots = l_r = 0 \end{aligned}$$

特征值与特征向量

A的属于不同特征值的特征向量线性无关

-> 数域K上n级矩阵可对角化的充分必要条件是：A的属于不同特征值的特征子空间维数和为n

-> 数域K上n级矩阵A如果有n个不同的特征值，则A可对角化。

$\lambda^n \cdot (n+1)$

$n \leq 24 \leq n \leq$

$1 \leq n \leq 24 \leq n \leq$
 $n.$

实对称矩阵的对角化

定义 (实对称矩阵) 实数域上的对称矩阵 简称实对称矩阵。

定义 (正交相似) 对于n级实矩阵，如果存在一个n级正交矩阵T，使得 $T^{-1}AT = B$ ，则称A正交相似于B

$$U^{-1}AU = B$$

定理

- 实对称矩阵的特征多项式在复数域中的每一个根都是实数
- ~~实~~实对称矩阵A的属于不同特征值的特征向量是正交的
- 实对称矩阵一定正交相似于对角矩阵

$(\lambda^2 - 1) \mid \lambda^{n-1}$
{ 实 }

(12)

$$\lambda_1(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda_1\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1^T A \alpha_2$$
$$\lambda_1(\alpha_1, \alpha_1) = \alpha_1^T A \alpha_1$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1, \alpha_2) = 0$$
$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$
$$\alpha_1 \cdot \alpha_2$$

特征值与特征向量

实对称矩阵对角化步骤：

1. 求A的特征多项式 $|\lambda I - A|$ ，解出全部的根为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ *16/12*
2. 对于A的每一个特征值 λ_j ，求齐次线性方程组 $(\lambda_j I - A)X = 0$ 的一个基础解系： $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jr_j}$ ，将其进行施密特正交化和单位化，得到

$\eta_{j1}, \eta_{j2}, \dots, \eta_{jr_j}$ *正交化 单位化 λ_j 特征空间*

3. 令

$r_1 + \dots + r_m = n$

$$T = (\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{1r_1}, \dots, \eta_{m1}, \eta_{m2}, \dots, \eta_{mr_m})$$

有 $T^{-1}AT = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_m\}$

r_1 r_m

特征值与特征向量

$$T = (1, 1, 1) \quad T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\eta_1 = \frac{p_1}{|p_1|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{4}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\eta_2 = \frac{p_2}{|p_2|} = \begin{bmatrix} \frac{4}{15}\sqrt{5} \\ \frac{2}{15}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

求正交矩阵T，使得 $T^{-1}AT$ 是对角矩阵。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+4)$$

$\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = -4$

$$\lambda_2 = -4$$

$$(-4I - A)x = 0$$

$$\eta_2 = \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$(5I - A) = 0$$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = \alpha_1 \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

要点回顾

- 矩阵相似

概念

$$U^{-1}AU = B \quad \text{特征相似性}$$

- 特征值与特征向量

特征多项式

$$|\lambda I - A|$$

$$\lambda_0$$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

- 矩阵可对角化的条件

所有特征值空间维数和为n

- 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵一定可以正交相似于一个对角矩阵

对角化流程

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$(\lambda_0 I - A)x = 0$$

$$\alpha_1 \dots \alpha_n$$

女 ✓

$$P = (\eta_1 \dots \eta_n)$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

我们在这里

□ 问题答疑：

<http://www.xxwenda.com/>

■ 可邀请老师或者其他人回复问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop



法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



二次型

定义 (二次型) 系数在数域 K 中的 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一个 ~~元~~二次齐次多项式, 称为数域 K 上的一个 n 元二次型, 它的一般形式是:

[illegible]

其中 $a_{ij} = a_{ji}$ ，把系数排成一个矩阵A，则 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是对称矩阵。

把A称为二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的矩阵。记 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 那么二次型可以改写为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{X}' \mathbf{A} \mathbf{X}$$

二次型

K^n

$x_1, x_2, \dots, x_n$

定义 (非退化线性替换)

令 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 设 C 是数域 K 上的

的一个 n 级可逆矩阵, 下述关系式

$$X = CY$$

$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$

称为变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 的一个 非退化线性替换。

n

(r, θ)
 (x, y)

定义 (等价二次型)

数域 K 上的两个 n 元二次型 $X'AX$ 与 $Y'BY$, 如

果存在一个非退化线性替换 $X = CY$, 把 $X'AX$ 变成 $Y'BY$, 则称二次型

$X'AX$ 与 $Y'BY$ 等价, 记为 $X'AX \cong Y'BY$

二次型

定义 (矩阵合同)

数域K上的两个n级矩阵A,B,如果存在K上的一个可逆矩阵C,使得

$$C^T A C = B$$

则称A与B合同, 记为 $A \simeq B$

⇒显然二次型 $X'AX$ 与 $Y'BY$ 等价当且仅当A与B合同

如果二次型 $X'AX$ 等价于一个只含平方项的二次型, 则这个只含平方项的二次型称为 $X'AX$ 的一个 标准形。

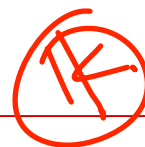
⇒用矩阵的术语, 研究的基本问题就是: 数域K上的n级对称矩阵能否合同于一个 对角矩阵。

$$C^T A C = B$$

$$C^T A C = B$$

$$\begin{aligned} X'AX &= Y'BY \\ X &= CY \\ (CY)' A (CY) &= Y' (C^T A C) Y \end{aligned}$$

实二次型



对于实数域上的 n 级对称矩阵 A ，我们已经证明存在一个 n 级正交矩阵 T ，使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵，并且其主对角线元素 A 的全部特征值，由于 $T^{-1} = T'$ ，因此 $T'AT$ 为对角矩阵，即 A 合同于对角矩阵，从而实数域上的 n 元二次型 $X'AX$ 一定等价于只含平方项的二次型，而且能找到正交矩阵 T ，使得经过变量替换 $X = TY$ ，把二次型 $X'AX$ 化为一个标准形：

$$T^{-1}AT = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$
$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Handwritten notes and diagrams:

- $T^{-1} = T'$ (written below the main equation)
- $T'AT$ (written to the right of the main equation)
- 合同 (written below $T'AT$)
- 标准形 (written below the quadratic form)

正定二次型与正定矩阵

$f(x) > 0$

定义(正定二次型) n 元实二次型 $X'AX$ 称为正定的，如果对 $\mathbb{R}^n$ 中任意非零列向量 α ，都有 $\alpha' A \alpha > 0$.

定义(正定矩阵) 实对称矩阵 A 称为正定的，如果实二次型 $X'AX$ 为正定的。正定的实对称矩阵简称正定矩阵。

正定二次型与正定矩阵

定理 n 级实对称矩阵 A 是正定的

$$\Leftrightarrow A \simeq I$$

$\Leftrightarrow A$ 的合同标准型中，主对角元全部大于0.

$\Leftrightarrow A$ 的特征值全部大于0.

$$\Rightarrow |A| > 0$$

$$\Rightarrow \text{tr}(A) > 0$$

$$A \simeq B \quad A \text{ 正定} \Rightarrow B \text{ 正定}$$

$$C^T A C = B$$

$$\alpha \neq 0$$

$$\alpha^T A \alpha > 0$$

$$\alpha^T B \alpha > 0$$

$$\alpha^T C^T A C \alpha > 0$$

$$(C\alpha)^T A (C\alpha) > 0$$

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$= D$$

$$D \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix} = I$$

$$C^T A C = I$$

$$|C| \neq 0$$

正定二次型与正定矩阵

定义 设A是一个n级矩阵，A的一个子式称为主子式，如果它的行指标和列指标相同，即它形如

$$A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_k \\ i_1, i_2, \dots, i_k \end{pmatrix}$$

A的下述主子式

$$A \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k \\ 1, 2, \dots, k \end{pmatrix}$$

称为A的k阶顺序主子式， $k = 1, 2, \dots, n$

正定二次型与正定矩阵

定理 实对称矩阵A正定的充分必要条件是A的所有顺序主子式全部

大于0

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} A_k & B_1 \\ B_1' & B_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} n-k \\ k \end{matrix} \quad \delta \neq 0$$

$\forall \delta > 0 \quad A_k \text{ 正定 } \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \delta^T & 0^T \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

$$= \begin{pmatrix} \delta^T & 0^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_k & B_1 \\ B_1' & B_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \delta^T A_k \delta > 0 \quad A_k \text{ 正定}$$

$n-1 \text{ 阶 } \checkmark$

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A_{n-1} 正定 $n-1 \text{ 阶 } y \in C_1$

$$C_1' A_{n-1} C_1 = I_{n-1}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

正定二次型与正定矩阵

fixing
fixing

定义 n 元实二次型 $X'AX$ 称为半正定（负定、半负定）的，如果对 $\mathbb{R}^n$ 中任意非零列向量 α ，都有

$$\alpha' A \alpha \geq 0 \quad (\alpha' A \alpha < 0, \alpha' A \alpha \leq 0)$$

C

定义 实对称矩阵 A 称为半正定（负定、半负定）的，如果实二次型 $X'AX$ 为半正定（负定、半负定）的。

$(x_1 \dots x_n) (A =$
 $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ $\dots$ $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_n}$ $\left| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right|$
 $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1}$ $\dots$ $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n}$

要点回顾

- 正定矩阵 (正定的实对称矩阵)

含义 : $\alpha' A \alpha > 0$, $\forall \alpha \neq 0 \in \mathbb{R}^n$

- 正定矩阵的等价判定方法

4 种.

$$A \simeq I$$

A 的特征值全部大于 0.

A 的所有顺序主子式全部大于 0

我们在这里

□ 问题答疑：

<http://www.xxwenda.com/>

■ 可邀请老师或者其他人回复问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop



法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



LU分解

LU分解 A是一个n级矩阵，那么一定存在一个下三角矩阵L，
一个上三角矩阵U，使得

$$A = LU$$

e.g.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

求解上述方程组，一共9个方程，9+3个未知数，因此LU分解不唯一。

LU分解

LU分解的本质是高斯消元法，对矩阵A左乘一系列下三角矩阵

$$L_{m-1}L_{m-2} \dots L_2L_1A = U$$

将A变成上三角矩阵，而左边一系列下三角矩阵的乘积仍然是下三角矩阵，记为 $\tilde{L}$ ，则

$$\tilde{L}A = U \Rightarrow A = LU$$

$$L = \tilde{L}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \text{②} + \text{①} \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

LU分解

Algorithm (LU Factorization)

Initialize $U = A, L = I$

for $k = 1 : m - 1$

for $j = k + 1 : m$

$L(j, k) = U(j, k) / U(k, k)$

$U(j, k : m) = U(j, k : m) - L(j, k)U(k, k : m)$

end

end

Remark 1. In practice one can actually store both L and U in the original matrix A since it is known that the diagonal of L consists of all ones.

2. The LU factorization is the cheapest factorization algorithm. Its operations count can be verified to be $O(\frac{2}{3}m^3)$.



LU分解

然而当A的主对角线上元素为0的时候，上述算法中的LU分解会失效

Example The breakdown of the algorithm in our earlier example with

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

can be prevented by simply *swapping rows*, i.e., instead of trying to apply L_2 to $L_1 A$ we first create

$$PL_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

— and are done.

LU分解

More generally, stability problems can be avoided by swapping rows before applying L_k , i.e., we perform

$$\underline{L_{m-1}P_{m-1} \dots L_2P_2L_1P_1}A = \underline{U}$$

The strategy we use for swapping rows in step k is to find the largest element in column k below (and including) the diagonal — the so-called *pivot element* — and swap its row with row k . This process is referred to as *partial* (row) *pivoting*. Partial column pivoting and complete (row and column) pivoting are also possible, but not very popular.

In general, LU factorization with pivoting results in

$$\underline{PA = LU,}$$

where $\underline{P = P_{m-1}P_{m-2} \dots P_2P_1}$, and $\underline{L = (L'_{m-1}L'_{m-2} \dots L'_2L'_1)^{-1}}$ with

$$L'_k = P_{m-1} \dots P_{k+1} L_k P_{k+1}^{-1} \dots P_{m-1}^{-1},$$

i.e., L'_k is the same as L_k except that the entries below the diagonal are appropriately permuted. In particular, L'_k is still lower triangular.

LU分解

Algorithm (LU Factorization with Partial Pivoting)

Initialize $U = A$, $L = I$, $P = I$

for $k = 1 : m - 1$

find $i \geq k$ to maximize $|U(i, k)|$

~~$U(k, k : m) \longleftrightarrow U(i, k : m)$~~

~~$L(k, 1 : k - 1) \longleftrightarrow L(i, 1 : k - 1)$~~

~~$P(k, :) \longleftrightarrow P(i, :)$~~

for $j = k + 1 : m$

$L(j, k) = U(j, k) / U(k, k)$

$U(j, k : m) = U(j, k : m) - L(j, k)U(k, k : m)$

end

end

$$PA = LU$$

↓

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

The operations count for this algorithm is also $\mathcal{O}(\frac{2}{3}m^3)$. However, while the swaps for partial pivoting require $\mathcal{O}(m^2)$ operations, ~~they would require $\mathcal{O}(m^3)$ operations in the case of complete pivoting.~~

LU分解

LU分解用于求解线性方程组

solve $Ax = b$ with A nonsingular of order n

factor-solve method using LU factorization

1. factor A as $A = PLU$ ($(2/3)n^3$ flops)

2. solve $(PLU)x = b$ in three steps

- permutation: $z_1 = P^T b$ (0 flops)
- forward substitution: solve $Lz_2 = z_1$ (n^2 flops)
- back substitution: solve $Ux = z_2$ (n^2 flops)

total cost: $(2/3)n^3 + 2n^2$ flops, or roughly $(2/3)n^3$

PLU

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ L & L & L & L \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

$$Ux = z_2$$

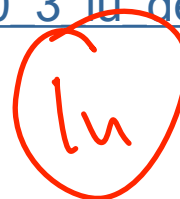
$$\begin{bmatrix} \times & & & \\ & \times & & \\ & & \times & \\ & & & \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \times & & & \\ & \times & & \\ & & \times & \\ & & & \times \end{bmatrix}$$

参考资料

1. http://www.math.iit.edu/~fass/477577_Chapter_7.pdf
2. http://nucinkis-lab.cc.ic.ac.uk/HELM/workbooks/workbook_30/30_3_lu_decomposition.pdf
3. <http://cn.mathworks.com/help/matlab/ref/lu.html>



我们在这里

□ 问题答疑：

<http://www.xxwenda.com/>

■ 可邀请老师或者其他人回答问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop



法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



Cholesky分解

Cholesky分解 A是一个n级正定矩阵，那么一定存在一个对
角线上元素为正的下三角矩阵L，使得

$$A = LL^T$$

我们称L是A的Cholesky因子 (Cholesky factor)，可以理解为A的“平方根”。

定理 当A是正定矩阵时，上述分解是惟一的；当A为半正定矩阵时，
上述分解是不惟一的。

Cholesky分解

数学归纳法

$[a_{11}]$ $n-1$ n

将矩阵A进行分块，得到

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & w^T \\ w & K \end{bmatrix}$$

从而对A可以进行对称的初等行列变换，得到

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0^T \\ \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}w & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & K - \frac{1}{a_{11}}ww^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}w \\ 0 & I \end{bmatrix} = L_1 A_1 L_1^T$$

注意到 $K - \frac{1}{a_{11}}ww^T$ 一定是正定的，所以我们可以迭代进行上述步骤。

Cholesky分解

从而我们可以得到

$$A_1 = L_2 A_2 L_2^T$$

进一步可以得到

$$A = L_1 L_2 \dots L_n L_n^T \dots L_2^T L_1^T$$

从而有

$$A = LL^T$$

Cholesky分解

Example Consider

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Cholesky factorization as explained above yields the sequence

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Distributing 2 copies of the identity matrix in the middle we arrive at

$$L^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

LU

Cholesky分解

Algorithm (Cholesky Factorization)

initialize $R =$ upper triangular part of A (including the diagonal)

for $k = 1 : m$

for $j = k + 1 : m$

$$R(j, j : m) = R(j, j : m) - R(k, j : m) \frac{R(k, j)}{R(k, k)}$$

end

$$R(k, k : m) = R(k, k : m) / \sqrt{R(k, k)}$$

end

The operations count for the Cholesky algorithm can be computed as

$$\sum_{k=1}^m \left[(m - k + 1) + \sum_{j=k+1}^m (2(m - j + 1) + 1) \right] = \left(\frac{1}{3}m^3 \right) + m^2 - \frac{1}{m}.$$

Thus the count is $\mathcal{O}(\frac{1}{3}m^3)$, which is half the amount needed for the LU factorization.

Another nice feature of Cholesky factorization is that it is always stable — even without pivoting.

Cholesky分解

Remark :

1. 检验一个矩阵是否正定的最便捷的方法是进行Cholesky分解，如果算法能够进行，那么矩阵正定，否则，~~矩阵不正定~~。
2. 在A是一个正定矩阵的情况下，我们使用Cholesky分解而非LU分解去求解线性方程组 $Ax = b$

Algorithm

- factor A as $A = LL^T$
- solve $LL^T x = b$
 - forward substitution $Lz = b$
 - back substitution $L^T x = z$

Cost: $(1/3)n^3$ flops

- factorization: $(1/3)n^3$
- forward substitution: n^2
- backward substitution: n^2

LU分解

Remark :

3. 对于正定矩阵A，可以利用Cholesky分解进行矩阵求逆，算法复杂度为 $O(n^3)$ ， n^3 的系数取决于具体算法，但是会比高斯消元法更节省时间。在实际应用中，应当尽量通过数学推演避免矩阵求逆。

$A = LL^T$
 $A^{-1} = L^{-1}L^{-T}$
 $= (L^{-1})^T L^{-1}$

L^{-1} 也是下三角.

(n^2) $(\frac{1}{3}n^3)$

$a_{11} \dots a_{nn}$
 $b_1 \dots b_n$
 $a_{11} \dots a_{nn}$

$a_{11} \frac{1}{c_1} + a_{1n} b_1 = 0$

参考资料

1. <http://www.cs.utexas.edu/~pingali/CS378/2011sp/lectures/chol4.pdf>
2. http://www.math.iit.edu/~fass/477577_Chapter_7.pdf
3. <http://www.doc88.com/p-5969805271110.html>

我们在这里

□ 问题答疑：

<http://www.xxwenda.com/>

■ 可邀请老师或者其他人回答问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop



法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

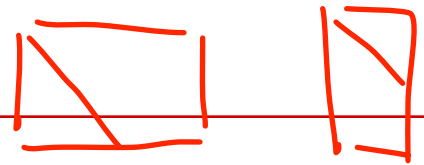
□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



SVD分解



SVD分解

A是一个 $m \times n$ 的矩阵，那么A的SVD分解为

$$A_{m \times n} = U_{m \times m} \Sigma_{m \times n} V_{n \times n}^T$$

其中 $U^T U = I, V^T V = I$ ，V的列向量是矩阵 $A^T A$ 的特征向量，U的列向量是矩阵 AA^T 的特征向量， Σ 只在对角线上有非零值，称为A的奇异值（singular value），按降序排列，并且取值为 $A^T A$ 或者 AA^T 的特征值的平方根。显然SVD分解不唯一。

$$\begin{aligned} A &= U \Sigma V^T \\ A^T A &= V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T \\ &= V \Sigma^T \Sigma V^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AA^T &= U \Sigma V^T V \Sigma^T U^T \\ &= U \Sigma \Sigma^T U^T \end{aligned}$$

SVD分解

不妨设 $m \geq n$, 那么有 $V = (v_1, \dots, v_n)$

$A_{m \times n}$

$$A = U_{m \times m} \Sigma_{m \times n} V_{n \times n}^T = (u_1, \dots, u_m)$$

$$U = (u_1, \dots, u_m)$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n d_i v_i^T u_i$$

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$$

从而我们将矩阵A分解为n个矩阵的和，并且 d_i 的大小评估了每个分量对总和的贡献。

$$u_i v_i^T$$

$$A_i$$

$$A = \sum_{i=1}^n d_i A_i$$

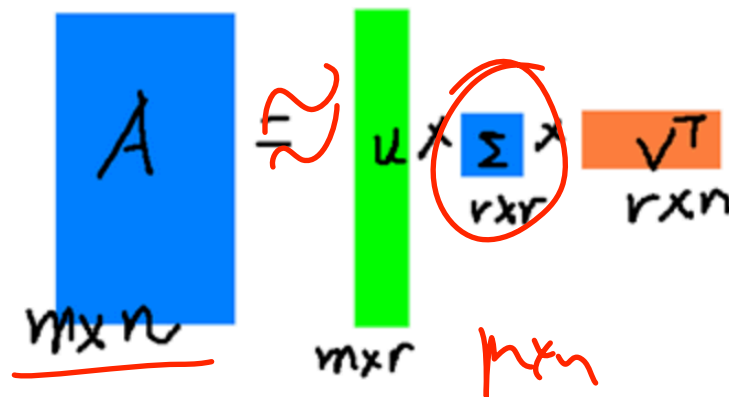
SVD分解

应用1 信息压缩，在SVD分解中，大多数情况下，前10%甚至前1%的奇异值之和就占了全部奇异值之和的99%以上，也就是说，我们可以仅取前 r 个分量来描述近似的矩阵 A 。

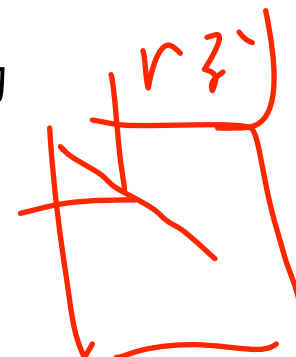
$$A = \sum_{i=1}^n d_i v_i^T u_i \approx \sum_{i=1}^r d_i v_i^T u_i$$

r 是一个远小于 m ， n 的数，从而体现到矩阵上，形式为

$m \times r + r + r \times n$
 $< m \times n$



$$r < \{n, m\}$$



稀疏矩阵

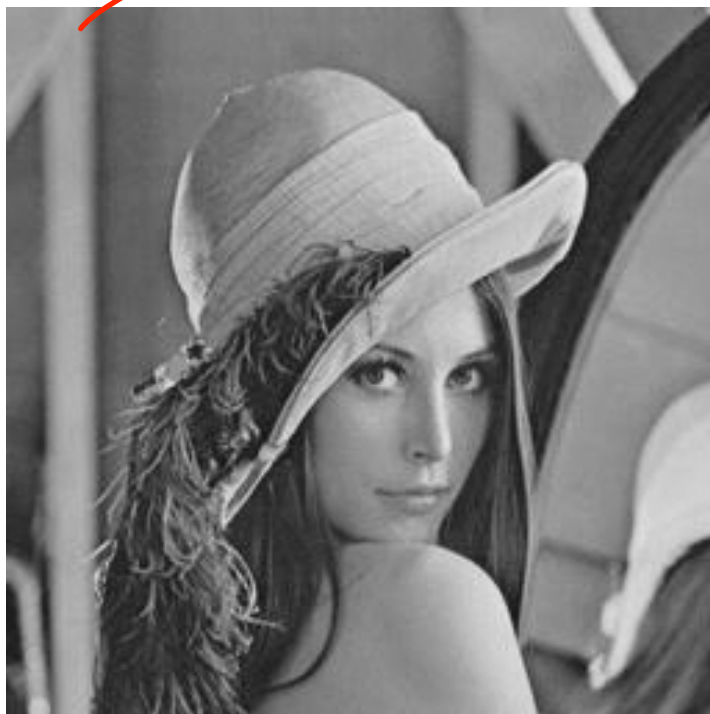
SVD分解

~~why not~~

原图

$$[A] \approx U \Sigma V^T$$

$r=10$ $r \uparrow$



SVD分解

$r=20$



$r=30$



SVD分解

原图

256×256

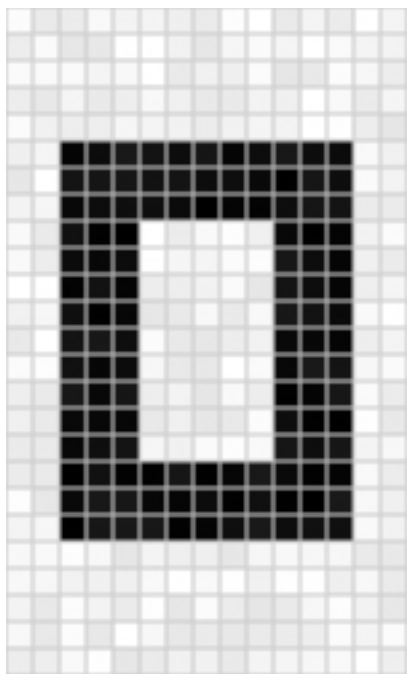
$U_{256 \times 50}$ $\Sigma_{50 \times 50}$ $V_{50 \times 256}^T$
 $r=50$



SVD分解

应用2 图像降噪，有的时候我们认为后面很小的特征值反映的是噪声，所以取前 r 个分量可以得到降噪的效果

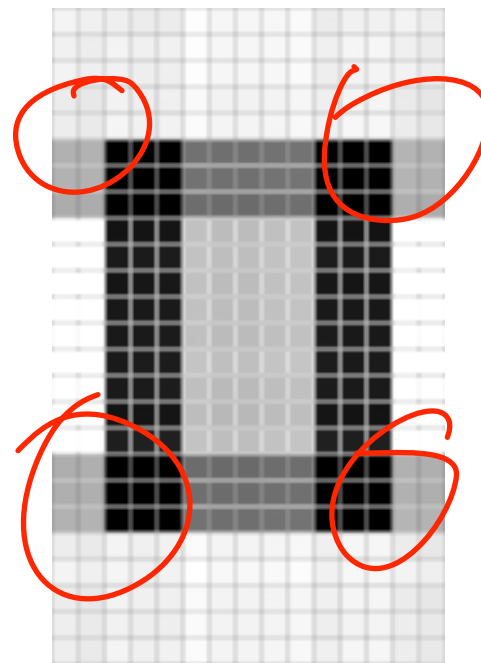
150×157
原图 $U \Sigma U^T$



$r=1$



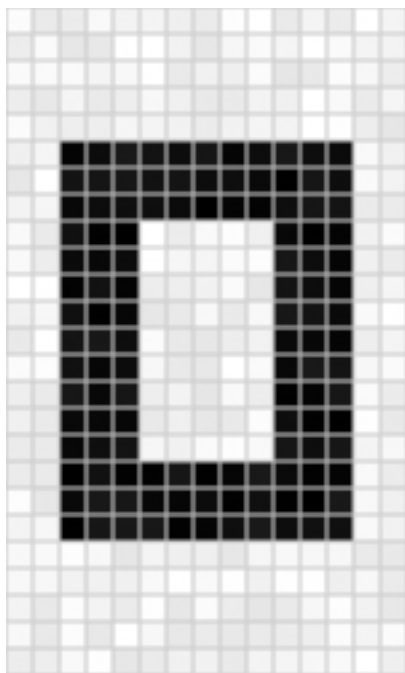
$r=2$



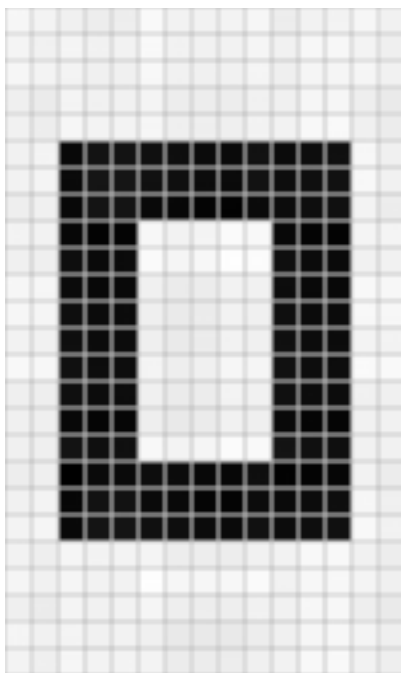
SVD分解

应用2 图像降噪，有的时候我们认为后面很小的特征值反映的是噪声，所以取前 r 个分量可以得到降噪的效果

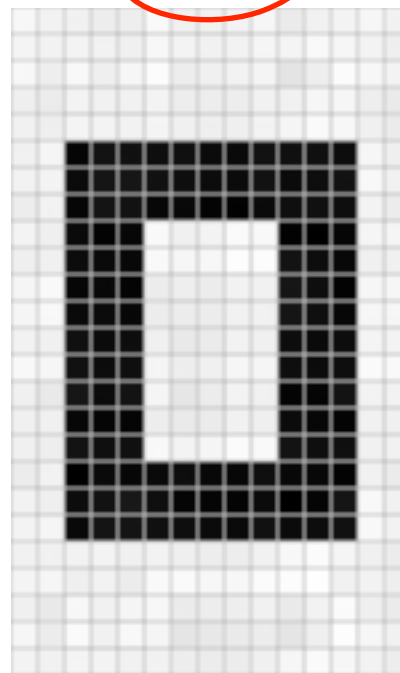
原图



$r=3$



$r=4$



SVD分解

应用3 数据降维-PCA，假设当前的数据矩阵为 $X_{n \times p}$ ，PCA方法的本质是希望对X进行线性变换，映射到一组新的特征 $T_{n \times p}$ 上，满足

$$X_{n \times p} = T_{n \times p} W_{p \times p}$$

并且特征T中，协方差按照从大到小排列，我们在后续的过程中选择协方差前r大的主成分，完成降维。

根据SVD，有 $X_{n \times p} = (U_{n \times n} \Sigma_{n \times p}) V_{p \times p}^T$ ， $X^T X$ 是对协方差的一个估计，从而有

$$X^T X = V \Sigma^T \Sigma V^T = W^T T^T T W$$

如果有 $W = V^T$ ，那么T满足条件，并且

$$T_{n \times p} = U_{n \times n} \Sigma_{n \times p}$$

参考资料

1. [http://web.mit.edu/be.400/www/SVD/Singular Value Decomposition.htm](http://web.mit.edu/be.400/www/SVD/Singular_Value_Decomposition.htm)
2. <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-svd>
3. [https://en.wikipedia.org/wiki/Principal component analysis](https://en.wikipedia.org/wiki/Principal_component_analysis)

我们在这里

□ 问题答疑：

<http://www.xxwenda.com/>

■ 可邀请老师或者其他人回答问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop

