

法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



欧氏空间

一般来说，描述n元函数的自变量，需要考虑n个有次序的实

数组：

$$(1, 2) \neq (2, 1)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

全对. ✓

向量. ✓

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$

以及由全体这样的数组组成的集合：

$\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n\}$$

符号表示

我们把每一个数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点。我们称 $\mathbb{R}^n$ 为 n维向量空间。

欧氏空间

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \text{ 相加}$$
$$\alpha \vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \text{ 数乘}$$

设 $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 则 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的内积定义为

$\vec{x} \cdot \vec{y}$ 内积

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^n$ $\vec{x} \cdot \vec{y} \in \mathbb{R}$

从内积的定义可以看出以下基本性质：

- **正定性** 对于 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, 有 $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$, 并且上述等号成立当且仅当 $\vec{x} = \vec{0}$
- **对称性** 对于 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, 有 $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- 对于 $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, 有 $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
- 对于 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 和 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, 有 $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

$(\mathbb{R}, \cdot)$

向量空间 $\mathbb{R}^n$ 有了内积运算之后，我们称 $\mathbb{R}^n$ 为欧几里得空间或者欧氏空间。利用内积运算，我们定义向量 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ 的模如下



$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

欧氏空间

$\|\vec{x}\|$ 长度
 $\|\vec{x}\|$ 长度. 2倍

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 则 x 与 y 的距离
定义为

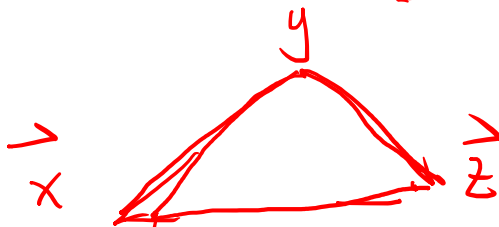
$\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 长度

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$\mathbb{R}^n, \cdot, \text{dis}$

以后我们也用 $|x|$ 来记 x 的模。从距离的定义容易推出他们满足一下性质：

- 正定性 对于 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, 有 $|x - y| \geq 0$, 并且 $|x - y| = 0$ 的充分必要条件是 $x = y$
- 对称性 对于 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, 有 $|x - y| = |y - x|$
- 三角不等式 对于 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, 有 $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$



欧氏空间中的邻域

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

$\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$

定义 设 $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, 称集合

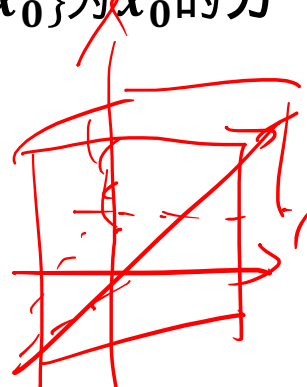
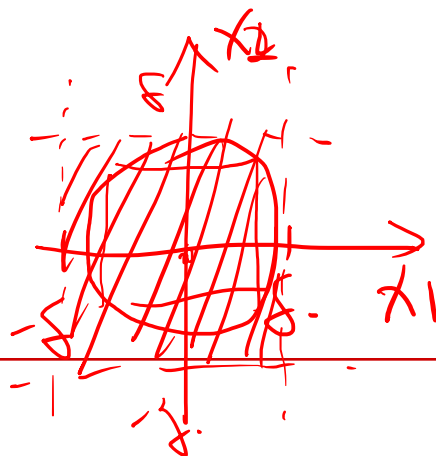
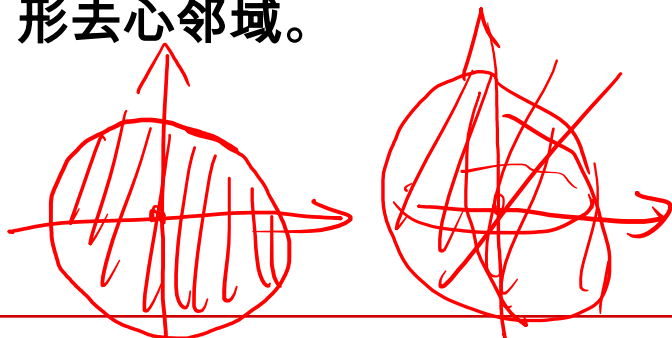
$$U(x_0, \delta) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < \delta\}$$

为以 x_0 为心的 δ 邻域；称集合 $U_0(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ 为 x_0 的 δ 去心邻域，也称为 球形邻域。

设 $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, 定义

$$N(x_0, \delta) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - x_i^0| < \delta, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为以 x_0 为心的 方形邻域；称集合 $N_0(x_0, \delta) = N(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ 为 x_0 的 方形去心邻域。



点列极限

定义 设 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点列，若存在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ，使得对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$ ，当 $k > K$ 时，有 $|x_k - x_0| < \varepsilon$ ，即 $x_k \in U(x_0, \varepsilon)$ ，则称 $\{x_k\}$ 是收敛点列，并称 $\{x_k\}$ 收敛于 x_0 ，记为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$$

这是也称 x_0 为 $\{x_k\}$ 的极限，若不存在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ，使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x_0| = 0$ ，则称 $\{x_k\}$ 发散

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\vec{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0)$$

点列极限

- 定义 设 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点列， $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ，则

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ 的充要条件是：对于 $\forall i (1 \leq i \leq n)$ ，有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i^0$$

- 设 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个收敛点列，其极限是唯一的。

- 设 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个收敛点列，则 $\{x_k\}$ 必有界。

- 设 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{x_k\}$ 与 $\{y_k\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ ， $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_0$ ，再设

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ，则有

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha x_0 + \beta y_0$$

$$(2) \lim_{k \rightarrow \infty} x_k y_k = x_0 y_0$$

聚点

- 定义 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个给定的集合，若 $x \in \mathbb{R}^n$ 的任何 δ 邻域 $U(x, \delta) (\delta > 0)$ 都有 E 中异于 x 的点，则称 x 为 E 的聚点或者极限点。
特别地，当 $x \in E$ 且 x 不是 E 的聚点时，则称 x 为 E 的孤立点。
- 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空，则 x 是 E 的聚点的充分必要条件是：存在 E 中一个两两不同的点列 $\{x_k\}$ ，使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$

开集与闭集

定义 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

(1) 若存在 $\delta > 0$, 使得 $U(x, \delta) \subset E$, 则称 x 是 E 的内点。记 E^o 为 E 中所有内点构成的集合, 并称之为 E 的内部。

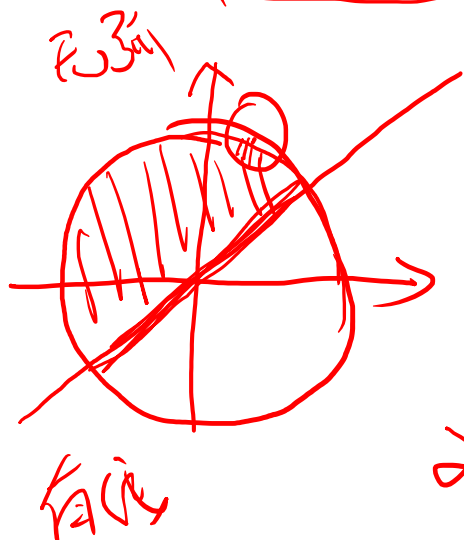
(2) 存在 $\delta > 0$, 使得 $U(x, \delta) \cap E = \emptyset$, 则称 x 是 E 的外点。记 E 中所有外点构成的集合称为 E 的外部。

(3) 若对于 $\forall \delta > 0$, 有 $U(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$, 并且 $U(x, \delta) \cap E^c \neq \emptyset$, 则称 x 是 E 的边界点, 并用 ∂E 来记 E 的边界点集, 称之为 E 的边界。

从定义可以看出 E 的内点一定属于 E ; E 的外点一定不属于 E , 并且 E 的外部即为 E^c 的内部 $(E^c)^o$ ($E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$); E 的边界可能是 E 中的点, 也可能不是 E 中的点。

开集与闭集

- 设集合 $E = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1, y \geq x\}$, 试求 E^o , $(E^c)^o$, ∂E .



外点

$$E^o = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1, y > x\}$$

$$(E^c)^o = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$$

$$\partial E = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1 \text{ 且 } y \geq x\}$$

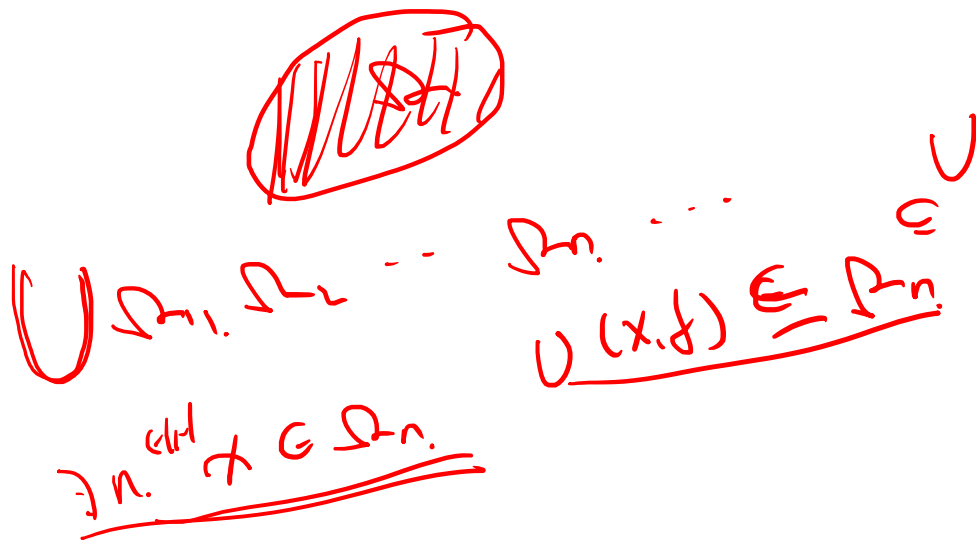
$$\cup \{x^2 + y^2 < 1 \text{ 且 } y = x\}$$

开集与闭集

定义 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若 $E = E^o$, 则称 E 为开集。我们规定空集是开集。

开集具有以下性质：

- $\mathbb{R}^n$ 与 $\emptyset$ 是开集。
- 任意个开集的并是开集
- 有限个开集之交是开集。



开集与闭集

闭区间 $[a, b]$

(a, b) $[a, b)$

定义 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若 E^c 是开集, 则称 E 为闭集。

闭集具有以下性质：

- $\mathbb{R}^n$ 与 $\emptyset$ 是闭集。
- 有限个闭集的并是闭集
- 任意个闭集之交是闭集。

$\mathbb{R}^n$

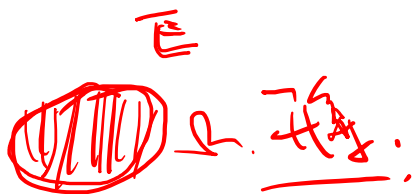
- 定理 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 E 是闭集的充分必要条件是 $E = \bar{E}$ 。

$\bar{E}$

开集与闭集

对开集闭集极限运算

- 定义 给定集合 E ，记 E' 为 E 的全体聚点组成的集合，并称 E' 为 E 的导集，再记 $\bar{E} = E \cup E'$ ，并称 $\bar{E}$ 为 E 的闭包。
- 定理 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，则 E 是闭集的充分必要条件是 $E = \bar{E}$ 。



闭包一定能写成闭的闭集。
闭包一定是闭集。

$$E \cup E'$$

$$E' \subseteq E$$

闭集在自己里面



欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的基本定理

- $\mathbb{R}^n$ 是完备的

$\mathbb{R}$ 完备性

(x, y, z) $\mathbb{R}^3$

- 闭集套定理** 设 $F_k \subset \mathbb{R}^n (k = 1, 2, \dots)$ 是一列非空闭集，并且满足：

(1) 对于 $\forall k \in \mathbb{N}$ ，有 $F_k \supset F_{k+1}$

(2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(F_k) = 0$

$\text{diam. } E = \sup \{ \|x - y\| \mid x, y \in E \}$

则存在唯一的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ，使得对于 $\forall k \in \mathbb{N}$ ，有 $x_0 \in F_k$ ，即

$$\{x_0\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k$$

- 聚点原理** 设 $\{x_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界点列，那么它必存在收敛子列。等价的描述为 $\mathbb{R}^n$ 中任何有界无穷集合至少有一个聚点。

多元函数

$\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$.

定义 (多元函数) 设有一个集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ 。如果对于集合 D 中的每一个点 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，按照一定的规则 f ，都有一个唯一确定的实数 $u \in \mathbb{R}$ 与之对应，则称 f 是一个定义在 D 上的 n 元函数。这里 D 被称为 f 的定义域。与 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 相对应的数 u 被称为 f 在 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的值，并记为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。全体函数值的集合

$$f(D) = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) | (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$$

称为 f 的值域，通常把 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为自变量，把 u 称为因变量。

多元函数

函数 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

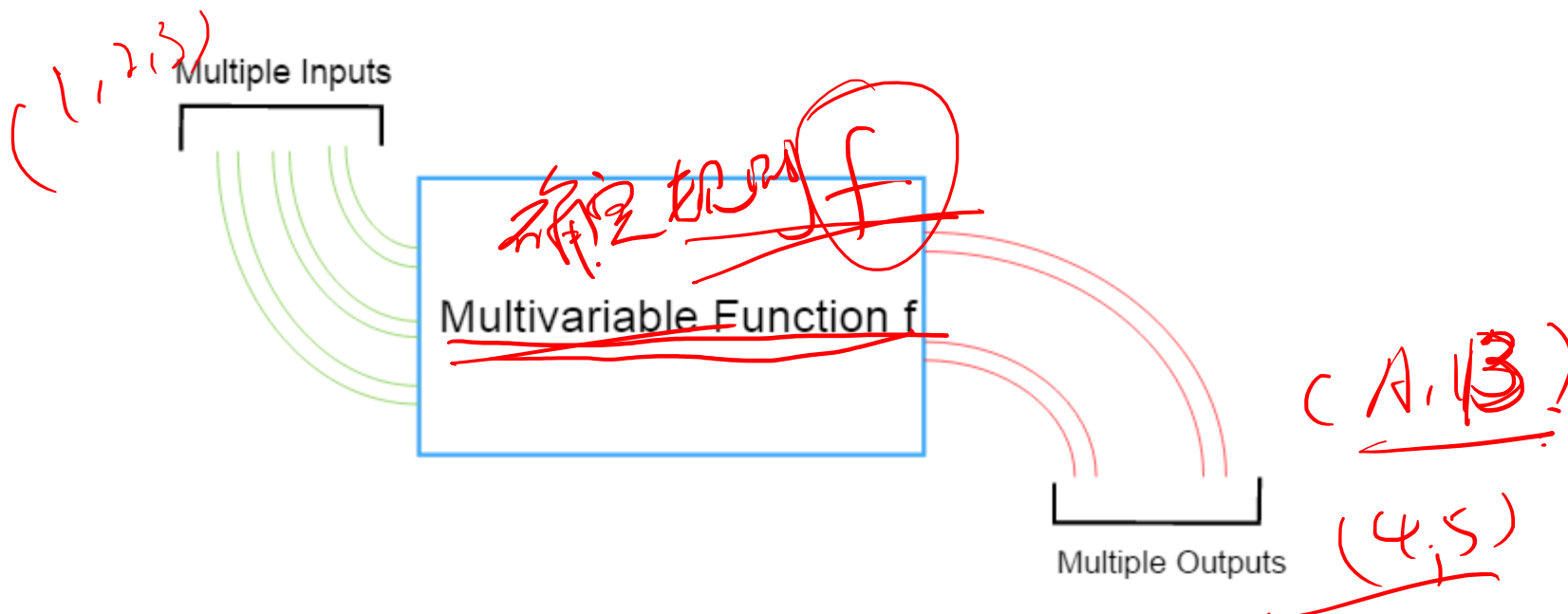
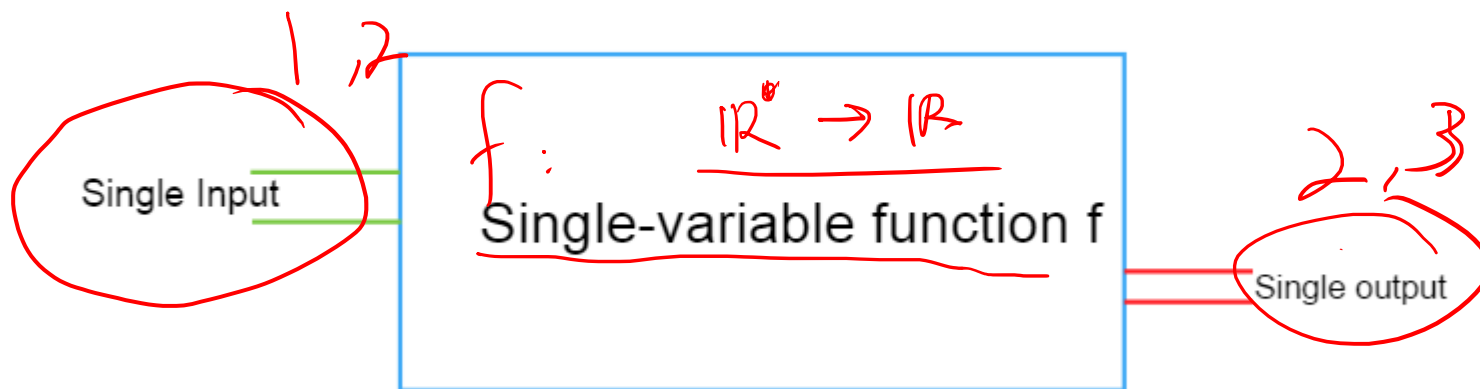
映射 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

定义 (多元映射) 设有一个集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ 。 f 是 $D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的一个映射，那么对于 D 中的每一个点 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，在 $\mathbb{R}^m$ 中都有唯一的一个点 $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ 与之对应，这里的每一个 $y_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 都是由 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 所确定的。故 y_j 是 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的一个函数，设它为 $f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) (j = 1, 2, \dots, m)$ 。这样一来，上述映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 相当于 m 个 n 元函数：

$$\begin{aligned} f: D \rightarrow \mathbb{R}^m \\ f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

因此， $\mathbb{R}^n$ 中的集合到 $\mathbb{R}^m$ 的一个映射可用有序的 m 个 n 元函数表示，其中第 j 个 n 元函数 f_j 称为映射的 **第 j 个分量**。

多元函数



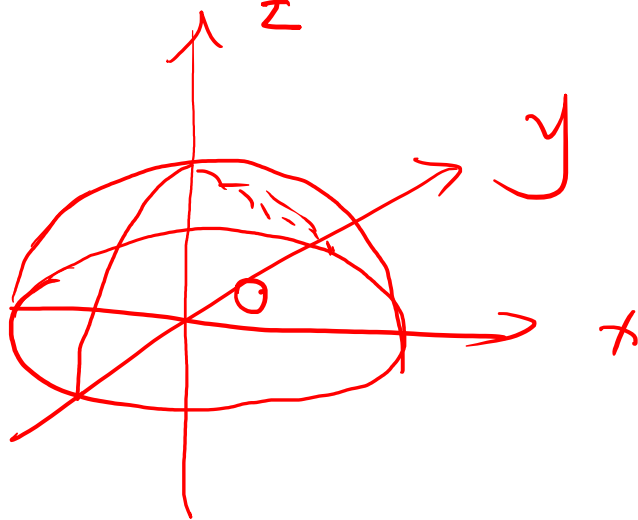
Example 1

- 函数 $z = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$ 的定义域为

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \quad \text{if}$$

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

它是 Oxy 上的一个圆，其圆心为原点，半径为 r 。这个函数的图形是位于 Oxy 平面上的半个球面。



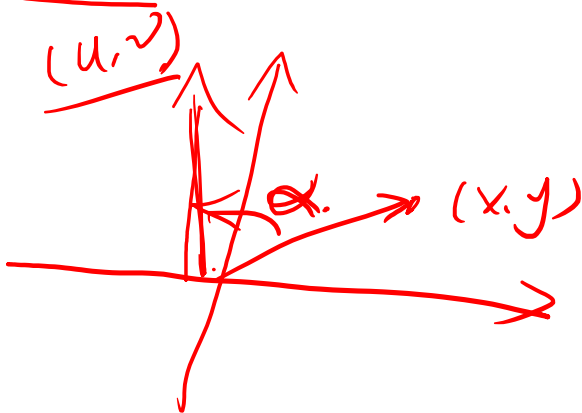
Example 2

- 平面上的坐标变化

$$\begin{cases} u = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ v = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

其中 α 是一个固定常数。映射 $(x, y) \rightarrow (u, v)$ 是 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的一个映射，
这里 u 与 v 是两个二元函数。



Example 3

To model varying temperatures in a large region, you could use a function which takes in two variables—longitude and latitude, maybe even altitude as a third—and outputs one variable, the temperature. Written down, this might look like

$$T = f(L_1, L_2)$$

- T is temperature.
- L_1 is longitude.
- L_2 is latitude.
- f is some complicated function that determines which temperature each longitude-latitude pair corresponds with.

Alternatively, you could say that the temperature T is a function of longitude L_1 and latitude L_2 and write it as $T(L_1, L_2)$.

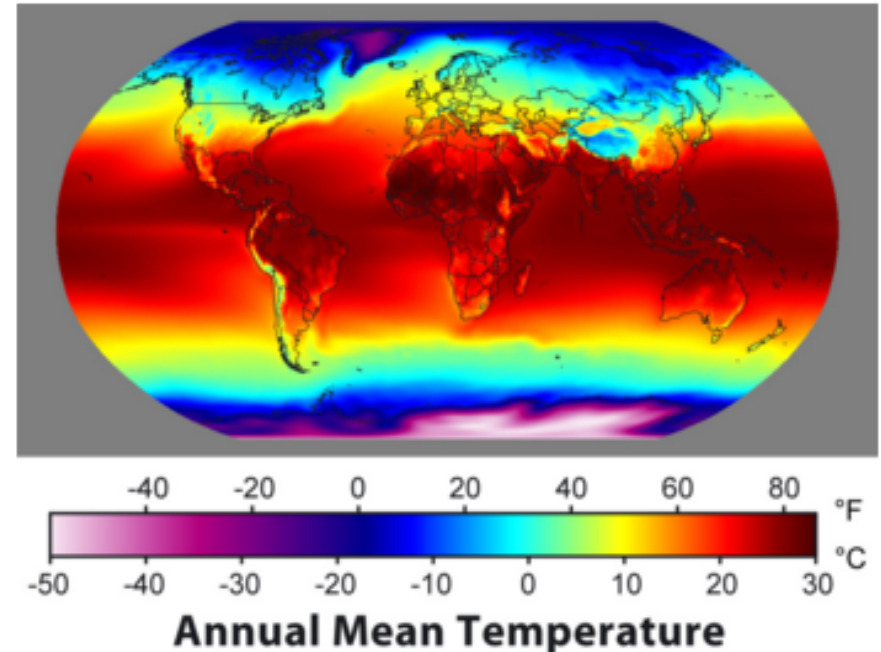


Image credit: ["Annual Mean Temperature"](#), Wikimedia, originally created by Robert A. Rohde

Example 4

To model how a particle moves through space over time, you could use a function which takes in one number—the time—and outputs the coordinates of the particle, perhaps two or three numbers depending on the dimension you are modeling.

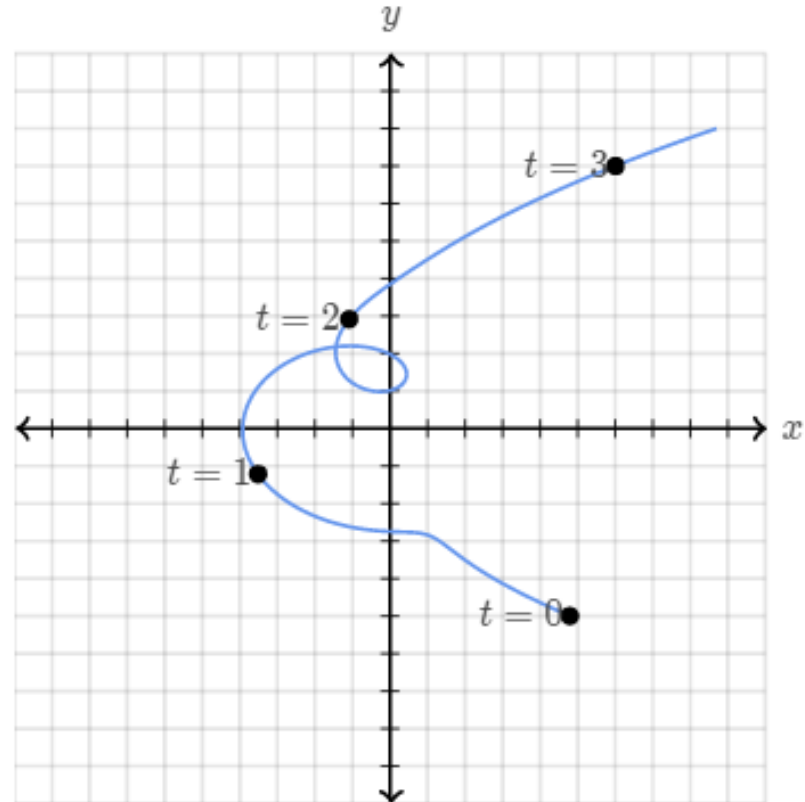
There are a couple different ways this could be written down:

$\vec{s} = f(t)$ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

- $\mathbf{s}$ is a two or three dimensional "displacement vector", indicating the position of the particle.
- t is time.
- f is a vector-valued function.

Alternatively, you might break down components of the vector-valued function into separate scalar-valued functions $x(t)$ and $y(t)$, which indicate the coordinates of x and y as functions of time:

$x(t) = \dots (\text{some expression of } t) \dots$
 $y(t) = \dots (\text{some other expression of } t) \dots$



多元函数的极限

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $f(x) \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$
 $x \in U(x_0, \delta) \implies |f(x) - A| < \varepsilon$

定义 (多元函数极限) 设 $f(x)$ 是定义在集合 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的函数,
 $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E'$. 若存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,
 当 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U_0(x_0, \delta) \cap E$ 时, 即 $0 < |x - x_0| < \delta$ 且 $x \in E$
 时, 有

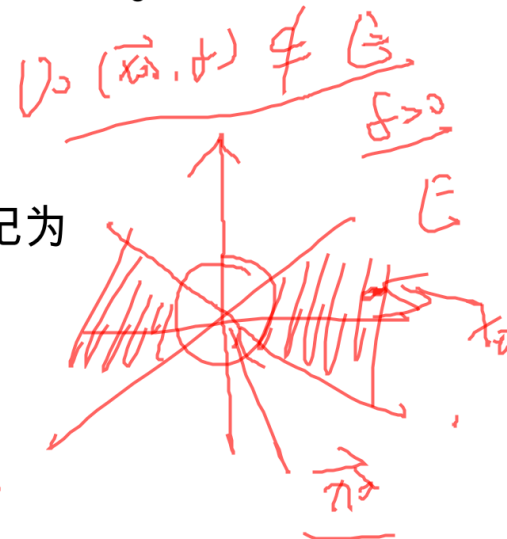
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称 A 为当 x (在 E 中) 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限, 记为

$$\lim_{E \ni x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

~~$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$~~

$\exists \delta > 0$
 $U_0(x_0, \delta) \subseteq E$



函数极限与序列极限的关系

定理 设 $f(x)$ 是定义在集合 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的函数, $x_0 \in E'$ 。则

$\lim_{E \ni x \rightarrow x_0} f(x) = A$ (可以是 ∞) 的充分必要条件是: 对于 $E \setminus \{x_0\}$ 中任意

满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ 的点列 $\{x_k\}$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = A$ 。

- 如果当 x 以某种特殊的方式 (比如沿曲线、点列等) 趋向于 x_0 时,

$f(x)$ 的极限不存在, 那么极限 $\lim_{E \ni x \rightarrow x_0} f(x)$ 必不存在。

函数极限与序列极限的关系

- 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = I$

$$\tan \theta \sim \theta \quad (\theta \rightarrow 0)$$

$$\theta \leftarrow \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|I| = \left| \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|(x+y)(x^2+y^2-xy)|}{x^2+y^2}$$

$$\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x+y| (|x^2+y^2| + |xy|)}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x+y| \sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$| \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) | \leq \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)|$$

$$|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

函数极限与序列极限的关系

- 设函数 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, 试问当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $f(x, y)$ 是否存在极限。



$$\begin{aligned} y &= kx \\ y &= x^2 \\ y &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= kx \\ f(x, y) &= \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2} \\ k &= 1 \quad k=2 \\ \frac{1}{2} & \neq \frac{2}{5} \end{aligned}$$

不存在

函数极限与序列极限的关系

- 设函数 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, 试问当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $f(x, y)$ 是否存在极限。



$$\frac{x^4}{y^2} = \frac{y^2}{y^2} = 1$$

$y = \varphi(x)$

不存在

$$f(x, y) = \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2}$$

路径不同

$$f(x, y) = \frac{kx^3}{x^4 + k^2 y^4} = \frac{kx}{x^2 + k^2} \rightarrow 0$$

极限是一定的

序列极限

趋向于 x_0 的任意

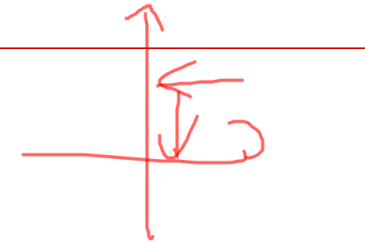
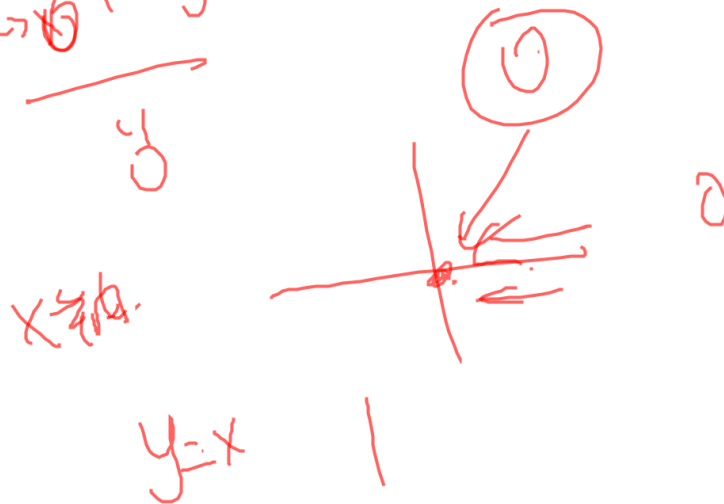
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$

函数极限与累次极限的关系

- 两个累次极限存在 $\nRightarrow$ 函数极限存在

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & xy = 0 \\ 1 & xy \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$



$x \neq 0, y \neq 0 \rightarrow 1$
 $(x^2, y^2) \rightarrow 0$
 $\rightarrow 1$

函数极限与累次极限的关系

- 函数极限存在 $\nRightarrow$ 累次极限存在



$$\sin x$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$$



$$(f(x, y)) \leq |x+y| \rightarrow 0$$

$$\varphi(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0}$$

$$(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

$$x \sin \frac{1}{x}$$

$$y \sin \frac{1}{y}$$

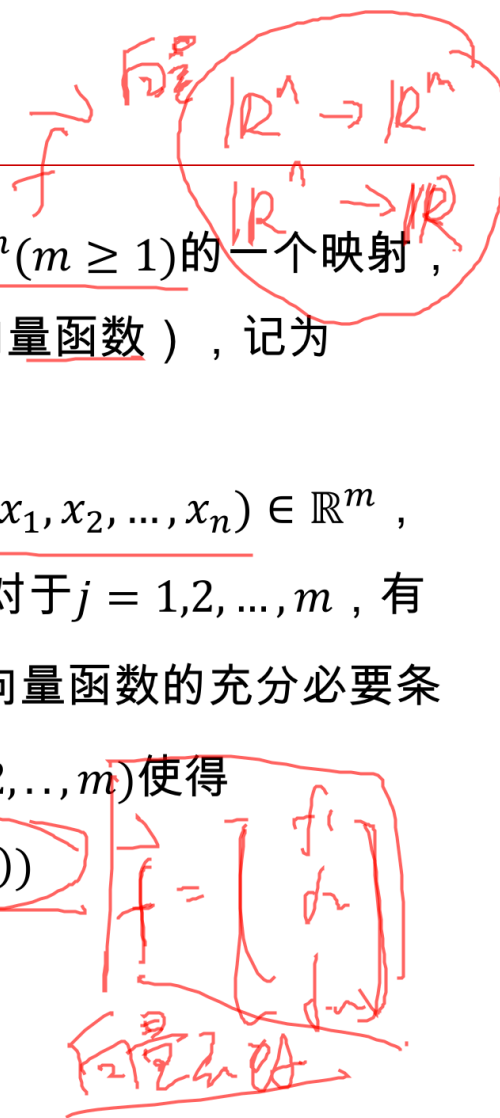
向量函数

定义 (向量函数) 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 若 f 是 E 到 $\mathbb{R}^m (m \geq 1)$ 的一个映射 , 则称 f 是 E 上的一个 m 维 (n 元) 向量函数 (简称向量函数) , 记为

$$u = f(x), x \in E$$

记 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m$, 则 $f(x)$ 的每个分量 u_j 都是 E 上的一个 n 元函数 , 即对于 $j = 1, 2, \dots, m$, 有 $u_j = f_j(x) (x \in E)$ 。因此 $u = f(x): E \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为一个向量函数的充分必要条件是 : 存在 m 个定义在 E 上的 n 元函数 $f_j(x) (j = 1, 2, \dots, m)$ 使得

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$



向量函数的极限

定义 (向量函数的极限) 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in E'$, 若 $f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$ $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ 是定义在 E 上的一个 m 维向量函数。若对于 $\forall j (1 \leq j \leq m)$, 有

$$\lim_{E \ni x \rightarrow x_0} f_j(x) = A_j$$

其中 $A_j \in \mathbb{R} (j = 1, 2, \dots, m)$, 则称 $f(x)$ 当 x (在 E 中) 趋于 x_0 的时候极限为 $(A_1, A_2, \dots, A_m)$, 记为

$$\lim_{E \ni x \rightarrow x_0} f(x) = (A_1, A_2, \dots, A_m)$$

若 $\exists j_0 (1 \leq j_0 \leq m)$, $\lim_{E \ni x \rightarrow x_0} f_{j_0}(x)$ 不存在, 则称 $f(x)$ 当 x (在 E 中) 趋于 x_0 的时候极限不存在。

多元连续函数的性质

- 两个多元连续函数的和差、积、商（分母不为0）是连续函数。
- 两个多元连续函数的复合函数是连续函数。
- 多元初等函数在其定义域内是连续的。

$$f(x, y) = e^{\cos x + y} (\ln x + \sin y)$$

多元连续向量函数

定义 (多元连续向量函数)

设 $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ 是 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的一个 m 维向量函数, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E$ 。若 x_0 是 E 的孤立点或者当 $x_0 \in E'$ 时有

$$\lim_{E \ni x \rightarrow x_0} f(x) = \left(\lim_{E \ni x \rightarrow x_0} f_1(x), \lim_{E \ni x \rightarrow x_0} f_2(x), \dots, \lim_{E \ni x \rightarrow x_0} f_m(x) \right) \\ = (f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_m(x_0)) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续。若 $f(x)$ 在 E 中的每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 E 上连续。若存在 $j_0 (1 \leq j_0 \leq m)$, $f_{j_0}(x)$ 在 x_0 处不连续, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处不连续或者间断, 此时 x_0 也称为 $f(x)$ 的间断点。

每个分量都连续

多元连续向量函数的性质

- 对于定义域相同的两个多元连续向量函数，它们的和、差、以及数乘还是多元连续向量函数。
- 两个多元连续向量函数的复合函数仍然连续。

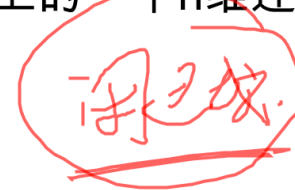


集合的连通性

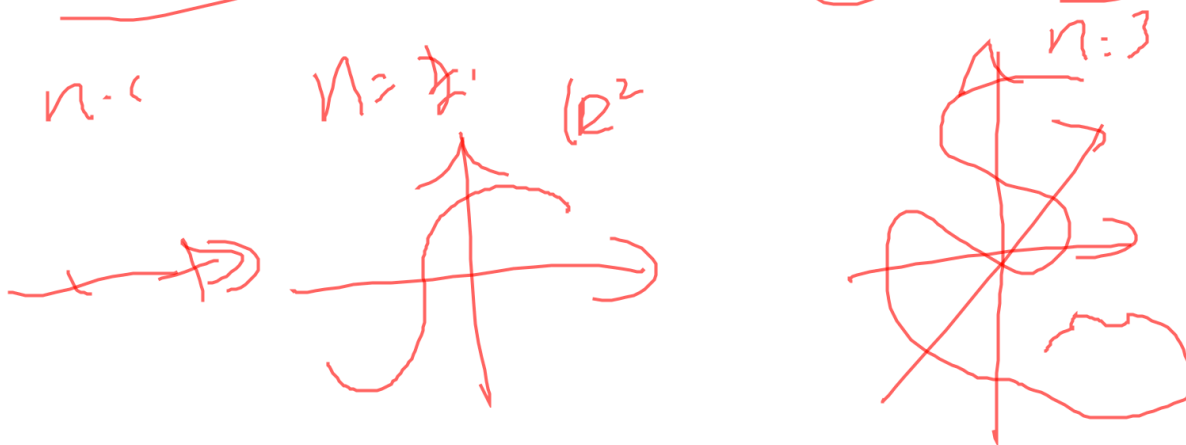


定义 (路径) 设 $D = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} (\alpha < \beta)$, 我们通常称 D 上的一个 n 维连续函数

$$h(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

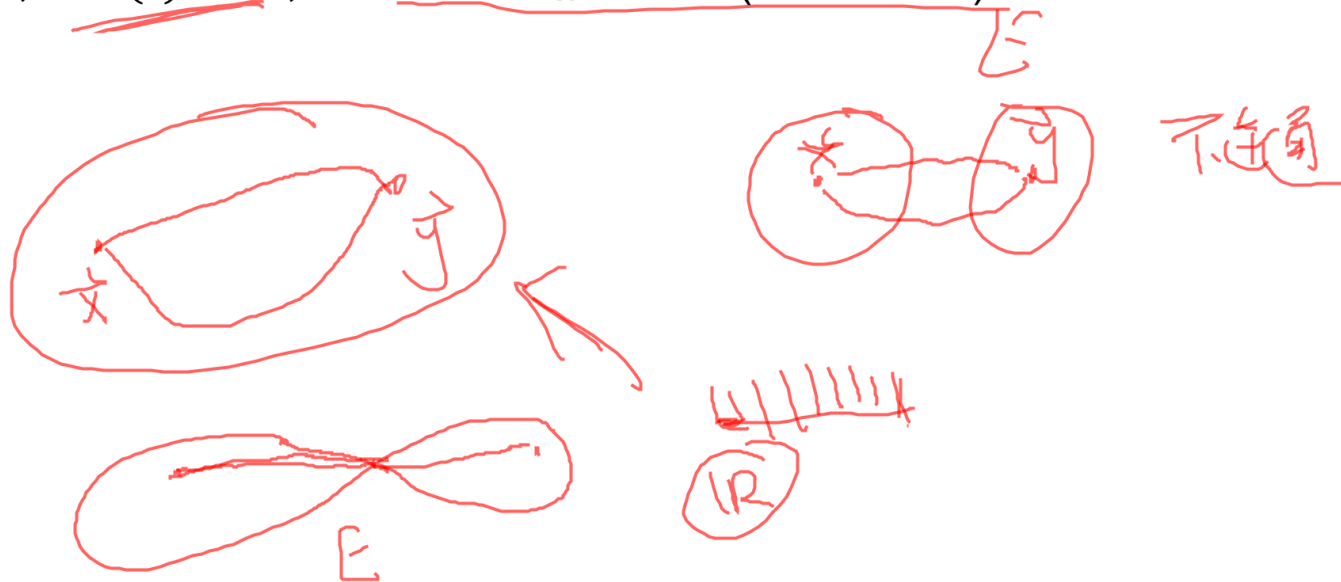


为 $\mathbb{R}^n$ 中的一条连续曲线 (简称曲线) 。当 $n = 1, 2, 3$ 时 , 连续曲线具有鲜明的几何意义。一条连续曲线也称为 $\mathbb{R}^n$ 中的一条道路 (或者路径)



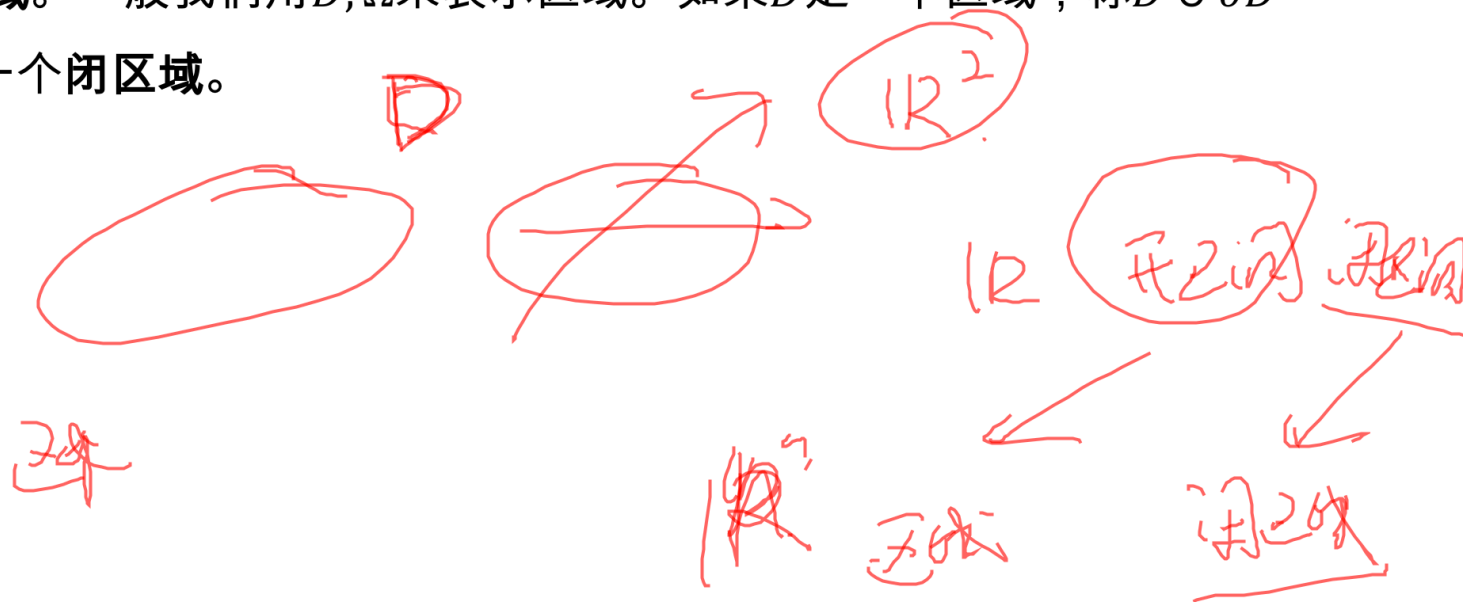
集合的连通性

定义 (道路连通) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空的集合, 若对于 $\forall x, y \in E$, 都存在一条道路 $h(t): t \in [\alpha, \beta]$, 使得 $h(\alpha) = x, h(\beta) = y$, 且对于 $\forall t \in [\alpha, \beta]$, 有 $h(t) \in E$, 则称 E 是道路连通的 (简称连通)。



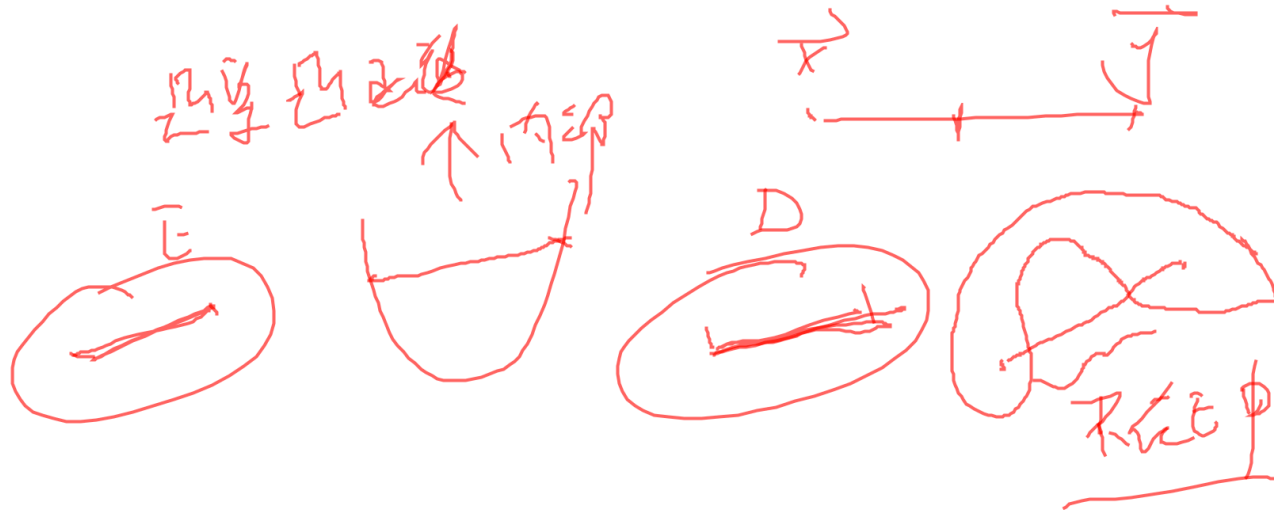
集合的连通性

定义 (区域, 闭区域) 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个连通开集, 那么称 E 是一个区域。一般我们用 D, Ω 来表示区域。如果 D 是一个区域, 称 $D \cup \partial D = \bar{D}$ 是一个闭区域。



集合的连通性

定义 (凸域) 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个区域，若对于 $\forall x, y \in D$ ，有 $tx + (1-t)y \in D (t \in [0,1])$ ，即连接 x 与 y 的线段在 D 内，则称 D 为凸域。



有界闭区域上连续函数的性质

设函数 $f(P)$ 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上连续，那么

$\mathbb{R}^n$ 有界闭区域

- (有界性定理) $f(P)$ 在 $\bar{D}$ 上有界，即存在常数 $M > 0$ ，使得

$$|f(P)| \leq M, \quad \forall P \in \bar{D}$$

$\mathbb{R}^n$ 有界闭区域

- (最值定理) $f(P)$ 在 $\bar{D}$ 上达到最大值和最小值，即存在点 $P_1, P_2 \in \bar{D}$ 使得

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2), \quad \forall P \in \bar{D}$$

- (介值定理) 如果 M 和 m 分别是 $f(P)$ 在 $\bar{D}$ 上的最大值和最小值，则对于任意的： $m \leq \gamma \leq M$ ，一定有一点 $P_0 \in \bar{D}$ 使得 $f(P_0) = \gamma$

偏导数

定义 (二元函数的偏导数)

设函数 $z = f(x, y)$ 是点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有定义, 将 y 固定为 y_0 , 若极限

(x_0, y_0)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称该极限值为 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数, 记做

f'_x

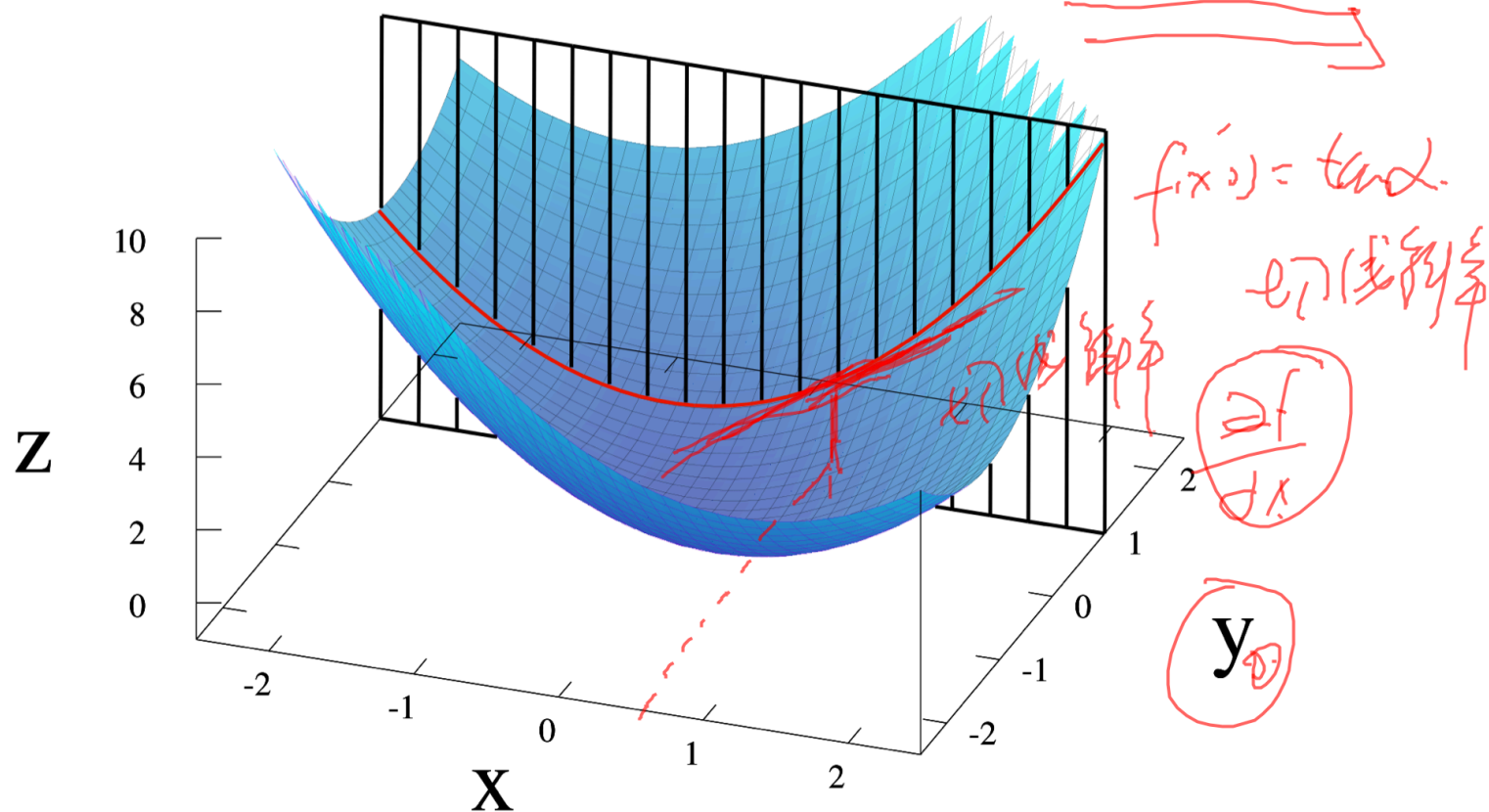
$f_x(x_0, y_0),$ $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x},$ $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)},$ $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)},$ $z_x \Big|_{(x_0, y_0)}$

partial. $\frac{\partial f}{\partial x}$ 偏导数

类似的, 如果 $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$ 存在, 则称它为 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处关于 y 的偏导数。

相同 $\Delta y \rightarrow 0$

偏导数的几何意义



图片来自: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Partial_func_eg.svg

偏导数的计算方法



General rule for computing partial derivatives

The rule for computing $\frac{\partial f}{\partial x}$:

- Pretend that all input variable *other than* x are constants, then perform an ordinary derivative as if f was a single-variable function with x as its only input.

Of course, there's nothing special about x here. To compute, $\frac{\partial f}{\partial y}$, pretend that all variables other than y are constants and take the derivative as if f was a function of y alone.

In general, whenever you see $\frac{\partial \langle \text{Some function} \rangle}{\partial \langle \text{Some variable} \rangle}$, treat all variables as constants except for whatever $\langle \text{Some variable} \rangle$ is, and take the ordinary derivative of the function.

本页内容来自: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/partial-derivatives/a/introduction-to-partial-derivatives>

$$f(x, y) = xy^2 - \sin(x)y + x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1y^2 - \cos(x)y + 3x^2$$

Pretend y is constant, and take the derivative

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(2y) - \sin(x)1 + 0$$

Pretend x is constant, and take the derivative

偏导数

- 设 $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + e^x \cos y$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 + y + e^x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2y + x + e^x (-\sin y)$$

偏导数



- 设 $z = f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)}$

$(x, y) = (1, 2)$ $\varphi(x)$
 $\varphi'(1)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot \ln(x^2 + y^2) + x \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$= \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}$$

(5) 代入 $y=2$
 $z = f(x, 2)$
 $= x \ln(x^2 + 4)$

代入 $(x, y) = (1, 2)$
 $= \ln 5 + \frac{2}{5}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(x^2 + 4) + x \cdot \frac{2x}{x^2 + 4}$
 代入 $x=1$

偏导数

- 设 $u = (x^2 + y^2)z^2 + \sin x^2$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$

3个偏导.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= z^2(2x+0) + \cos x^2 \cdot 2x \\ &= 2xz^2 + 2x \cos x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= z^2 \cdot 2y \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2(x^2 + y^2)z\end{aligned}$$

向量函数的导数

定义 (向量函数的导数) 向量函数 $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上有定义, $\mathbf{x}_0 \in D$, $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)^T$ 如若对于 $\forall j(1 \leq j \leq m)$, $f_j(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微, 则 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微, 记

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

有 $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = A d\mathbf{x}$ 或者 $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = A$ 。称矩阵 A 是 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处的雅可比

(Jacobi) 矩阵, 记为 $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$, 特别地, 当 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是 n 维向量函数的时候,

A 是 $n \times n$ 矩阵, 此时 $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ 的行列式称为 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处的雅可比行列式。

向量函数的导数

- 设 $\mathbf{w} = (r, \varphi, \theta)$, 求

$$f(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} x(\mathbf{w}) \\ y(\mathbf{w}) \\ z(\mathbf{w}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

其中 $D = \{(r, \varphi, \theta) : 0 < r < +\infty, 0 < \varphi < \pi, 0 < \theta < 2\pi\}$, 试求 $f'(\mathbf{w})$ 以及 $f(\mathbf{w})$ 在 $\mathbf{w}$ 处的雅克比行列式。

$$f'(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$$|J_f(\mathbf{w})| = r^2 \sin \varphi$$

高阶偏导数

定义 (二元函数的二阶偏导数)

设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 中有偏

导数 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 。若这两个偏导数在 D 内也有偏导数，这就导出

$f(x, y)$ 的二阶偏导数。 $f(x, y)$ 的二阶偏导数一共有四个，分别记做

$$\begin{array}{ll}
 f_{xx}(x, y), & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ 或 } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \\
 f_{xy}(x, y), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ 或 } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \\
 f_{yx}(x, y), & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ 或 } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \\
 f_{yy}(x, y), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ 或 } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)
 \end{array}$$

这里 f_{xy} 和 f_{yx} 称作混合偏导数。以此类推，我们可以定义各阶偏导数。

高阶偏导数

定理 (混合偏导数相等的条件)

若函数 $f(x, y)$ 的两个混合偏导数 $f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y)$ 在区域 D 内连续, 则该区域内这两个二阶偏导数相等。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

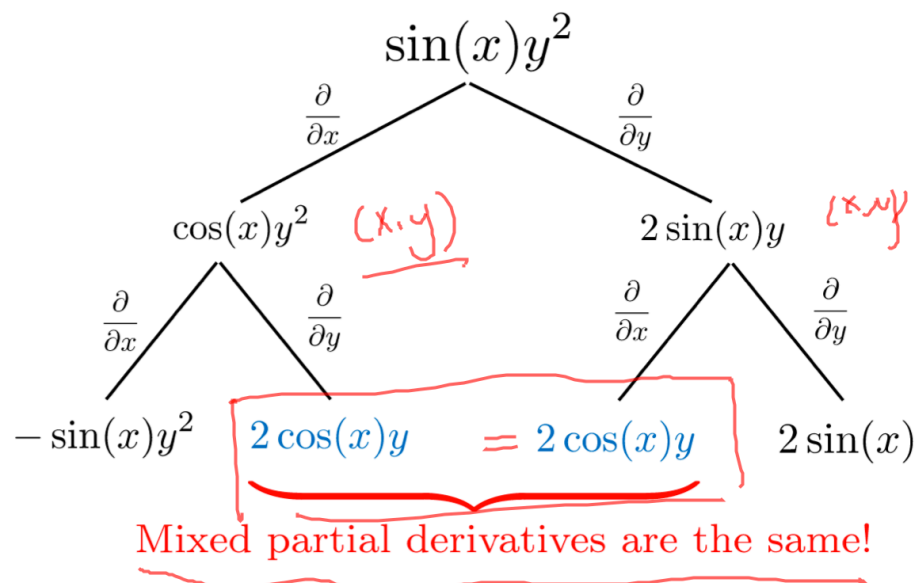
连续

连续

C^2

45. 31

高阶偏导数



对称性

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

本页内容来自: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/partial-derivatives/a/second-partial-derivatives>

高阶偏导数

- 设 $z = ye^{xy}$, 求二阶偏导数。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= ye^{xy} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= (1+xy)e^{xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= (2y+xy^2)e^{xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= [y + (1+xy)y]e^{xy} = (2y+xy^2)e^{xy} \end{aligned}$$

高阶偏导数

- 设 $z = ye^{xy}$, 求二阶偏导数。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= ye^{xy} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= (1+xy)e^{xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= (2y+xy^2)e^{xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= [y + (1+xy)y]e^{xy} = (2y+xy^2)e^{xy} \end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

高阶偏导数

- 证明 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 满足平面拉普拉斯 (Laplace) 方程

(x, y)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$\Delta u = 0$

海色矩阵

定义 (海瑟矩阵)

设 $u = f(x)$ 是定义在集合 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的函数, 且 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。如果函数的所有二阶偏导数都存在, 那么称矩阵

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Handwritten notes around the matrix:

- Left side: $f(\vec{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$
- Right side: $f(\vec{x})$, $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$, $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{x}}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \times n$

H 为函数 $f(x)$ 的海色 (Hessian) 矩阵。

全微分

$$f(x) \quad \Delta x \quad \Delta y = \frac{f'(x_0) \Delta x}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

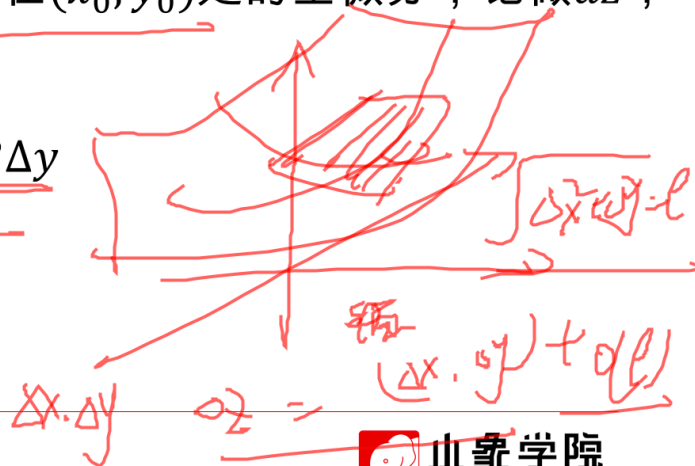
定义 (二元函数的全微分) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有定义。若 $f(x, y)$ 的全增量 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 可以写成

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0)$$

其中 A, B 是只与 (x_0, y_0) 相关的, 而与 $\Delta x, \Delta y$ 无关的数, 则称 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 并称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的全微分, 记做 dz , 即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

由定义可以看出, dz 是 Δz 的线性主部。



全微分与偏导数的关系

定理 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，则它在 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在，且 $f_x(x_0, y_0) = A, f_y(x_0, y_0) = B$ ，其中 A, B 是在全微分定义中的两个常数。所以全微分公式又可以写为

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

或者

$$df = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

$$= \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } f^T \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

全微分与偏导数的关系

定理 (可微的充分条件) 若函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的某个邻域内存在, 且这两个偏导数在 (x_0, y_0) 处连续, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微。

多元 可微 $\Rightarrow$ 可导
可微 $\Rightarrow$ 偏导 + 连续
可微 $\Rightarrow$ 偏导存在

全微分与偏导数的关系

通常，我们遇到的函数大多数都是初等函数。一个初等函数的偏导数若是存在的话，一般来说是初等函数，而初等函数在其定义域内是连续的，所以对于初等函数而言，只要偏导数存在，就一定可微。

连续

初等函数

可微

OK

全微分

- 求 $u = \left(\frac{y}{x}\right)^z$ 在点 $(1, 2, -1)$ 处的全微分。

grad f. $dx \cdot d_x + dy \cdot d_y + dz \cdot d_z$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z \left(\frac{y}{x}\right)^{z-1} \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = z \left(\frac{y}{x}\right)^{z-1} \frac{1}{x}$$

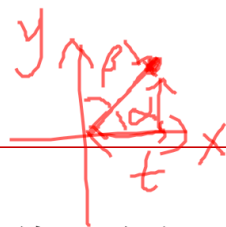
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{y}{x}\right)^z \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

取 $(x, y, z) = (1, 2, -1)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_p = \frac{1}{2} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_p = -\frac{1}{4} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_p = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$du \Big|_p = \frac{1}{2} dx - \frac{1}{4} dy + \frac{1}{2} \ln 2 dz$$

方向导数



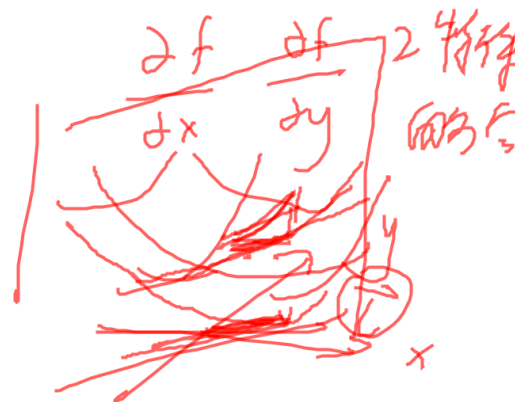
定义 (方向导数) 设 $z = f(x, y)$ 在一点 $P_0(x_0, y_0)$ 的一个邻域内有定义, 设 l 是一个方向, 方向余弦是 $(\cos\alpha, \cos\beta)$ 。若极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

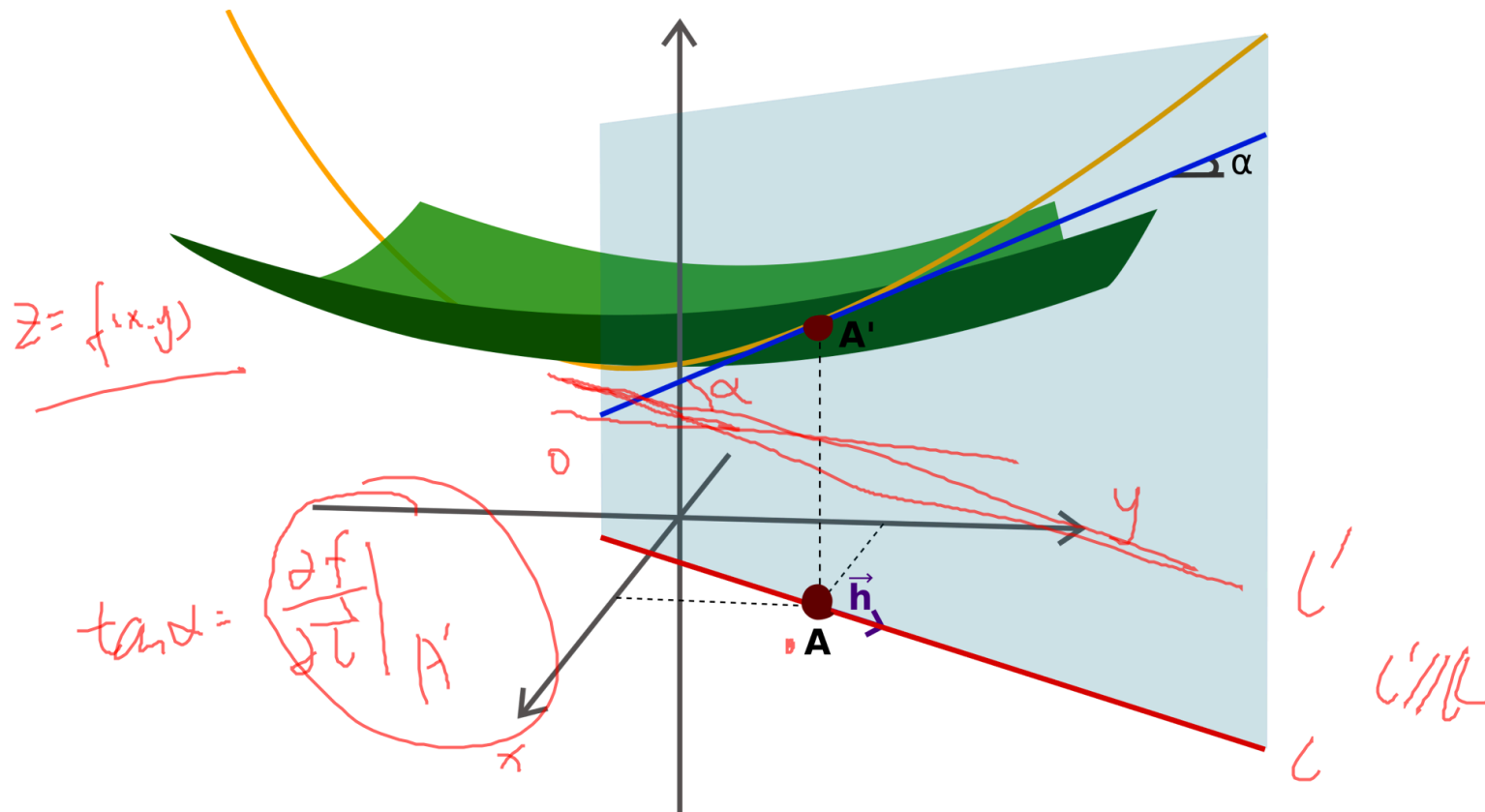
存在, 则我们称此极限值为函数 $z = f(x, y)$ 在 P_0 处沿方向 l 的方向导数,

记为 $\frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)}$ 。

$$\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)} \quad \frac{\partial f}{\partial l}$$



方向导数的几何意义



图片来自: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Geometrical_interpretation_of_a_directional_derivative.svg

方向导数与偏导数的关系

定理 若函数 $z = f(x, y)$ 在一点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微，则 $f(x, y)$ 在该点沿任一方向 l 的方向导数均存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta$$

$\frac{\Delta x}{\Delta l} \quad \frac{\Delta y}{\Delta l}$

其中 l 的方向余弦是 $(\cos \alpha, \cos \beta)$ 。类似可以定义更多元函数的方向导数。

Handwritten derivation:

$$P_0(x_0, y_0) \rightarrow P_t(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta)$$

$$f(P_t) - f(P_0) = f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)$$

$$= f_x(P_0) t \cos \alpha + f_y(P_0) t \cos \beta + o(t)$$

$$\frac{f(P_t) - f(P_0)}{\sqrt{(t \cos \alpha)^2 + (t \cos \beta)^2}} = \frac{f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \cos \beta + o(t)}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} = \frac{f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \cos \beta}{1} + o(1)$$

Result: $\frac{\partial f}{\partial l} = (f_x, f_y) \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix}$

Note: grad is circled in the original image.

方向导数与偏导数的关系

定理 若函数 $z = f(x, y)$ 在一点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微，则 $f(x, y)$ 在该点沿任一方向 l 的方向导数均存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta$$

其中 l 的方向余弦是 $(\cos \alpha, \cos \beta)$ 。类似可以定义更多元函数的方向导数。

$$\begin{aligned} f(P_t) - f(P_0) &= f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(P_0) t \cos \alpha + f_y(P_0) t \cos \beta + o(t) \\ t \rightarrow 0 \quad e &= \sqrt{t^2 \cos^2 \alpha + t^2 \cos^2 \beta} \quad (t \rightarrow 0) \\ \frac{\partial f}{\partial l} &= \frac{f(P_t) - f(P_0)}{t} = \frac{f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \cos \beta + \frac{o(t)}{t}}{t} \\ &= \frac{f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \cos \beta + o(1)}{1} = f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \cos \beta \end{aligned}$$

方向导数与偏导数的关系

定理 若函数 $z = f(x, y)$ 在一点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微，则 $f(x, y)$ 在该点沿任一方向 l 的方向导数均存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta$$

其中 l 的方向余弦是 $(\cos \alpha, \cos \beta)$ 。类似可以定义更多元函数的方向导数。

$$\begin{aligned}
 f(P_t) - f(P_0) &= f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0) \\
 &= f_x(P_0) t \cos \alpha + f_y(P_0) t \cos \beta + o(t) \\
 t \rightarrow 0 \quad \rho &= \sqrt{t^2 \cos^2 \alpha + t^2 \cos^2 \beta} \quad (t \rightarrow 0) \\
 \frac{\partial f}{\partial l} &= \frac{f(P_t) - f(P_0)}{t} = \frac{f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \cos \beta + \frac{o(\rho)}{t}}{\frac{\rho}{t}} = \frac{o(\rho)}{\rho} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

梯度

定义 (梯度) 若函数 $z = f(x, y)$ 在一点 $P_0(x_0, y_0)$ 任一方向 l 的方向导数均存在, 且表示为

$$(f_x, f_y) = \vec{g}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta$$

记 $\underline{l_0 = (\cos \alpha, \cos \beta)}$, $\underline{g = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))}$, 那么上式可表达为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{P_0} = \underline{g^T l_0}$$

这里当 $P_0(x_0, y_0)$ 给定之后, $\underline{g}$ 是一个固定向量, 但是 $\underline{l_0}$ 随 l 而变化

$$(x_0, y_0)$$

梯度

$$\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{P_0} = \underline{g^T l_0} = |g| |l_0| \cos \angle g, l_0 = |g| \cos \angle g, l_0$$

Handwritten notes: $|l_0|=1$ and (x_0, y_0) are circled in red.

其中 $\angle g, l_0$ 表示 g 与 l_0 之间的夹角，很明显当 $\angle g, l_0 \geq 0$ 时 $\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{P_0}$ 达到

最大值，即 g 与 l 方向一致时，函数关于 l 的方向导数最大，最大值为 $|g|$ 。

定义 $g = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ 为 f 在 $P_0(x_0, y_0)$ 点处的梯度，记为

$$\underline{\text{grad } f} \Big|_{P_0} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

Handwritten notes: A sine wave is drawn to the left. To the right, a diagram shows a vector g and its projection onto a line l to illustrate the directional derivative.

或者

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$\underline{\nabla f} \Big|_{(x_0, y_0)} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

Handwritten note: ∇f is written in red to the left of the equation.

梯度的性质

- 函数沿梯度方向时方向导数达到最大，函数值增大最快，沿负梯度方向时方向导数达到最小，函数值减少最快。

- 一个函数经过梯度运算之后得到的结果 $\text{grad } f$ 是一个向量。

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$\nabla f(\vec{x})$

梯度

- 设 $f(x, y, z) = xyz$, 求 $\text{grad } f \Big|_{(1,2,3)}$

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (yz, xz, xy)$$

$$\text{代入 } (x, y, z) = (1, 2, 3) \quad P$$

$$\underline{\text{grad } f|_{(1,2,3)} = (6, 3, 2)}$$

梯度场

$|df|$ $y: x$

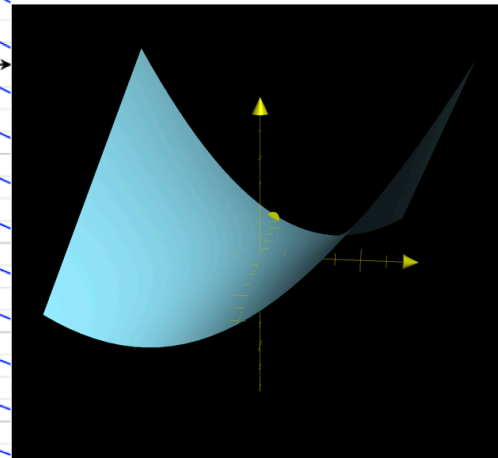
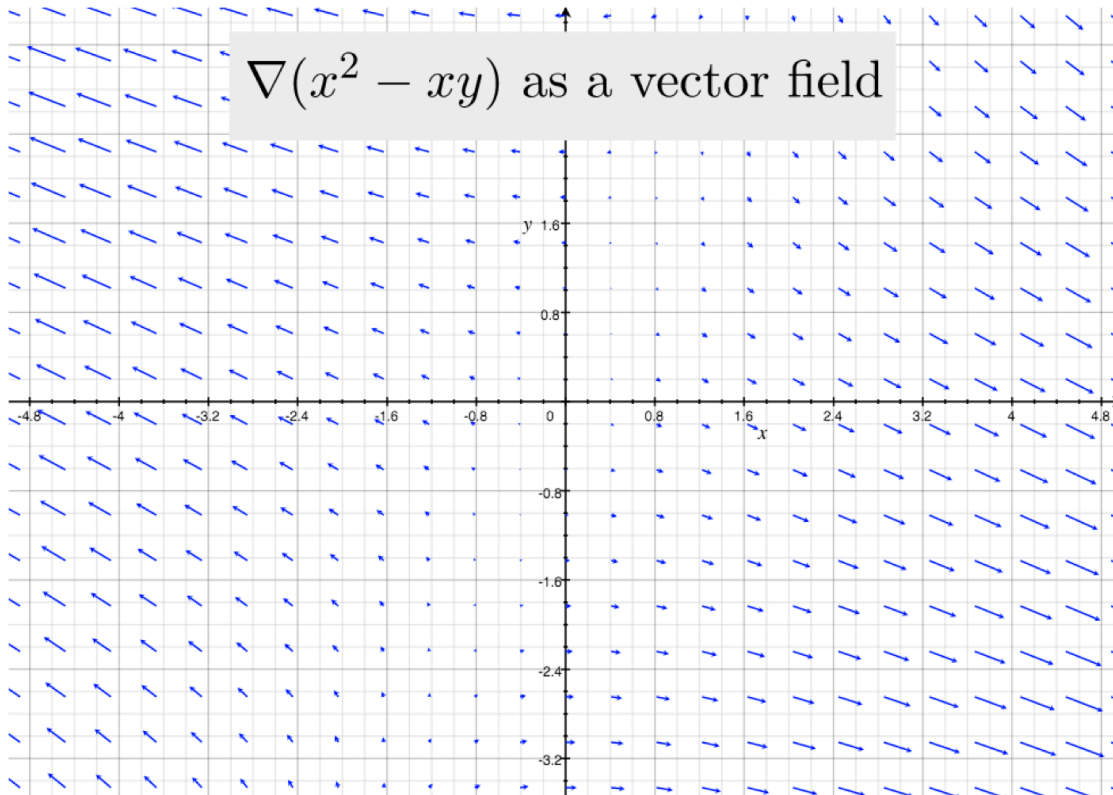
(∇f)

$$f(x, y) = x^2 - xy$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x \end{pmatrix}$$

$(1, 2)$
 $(0, -1)$

$\nabla(x^2 - xy)$ as a vector field



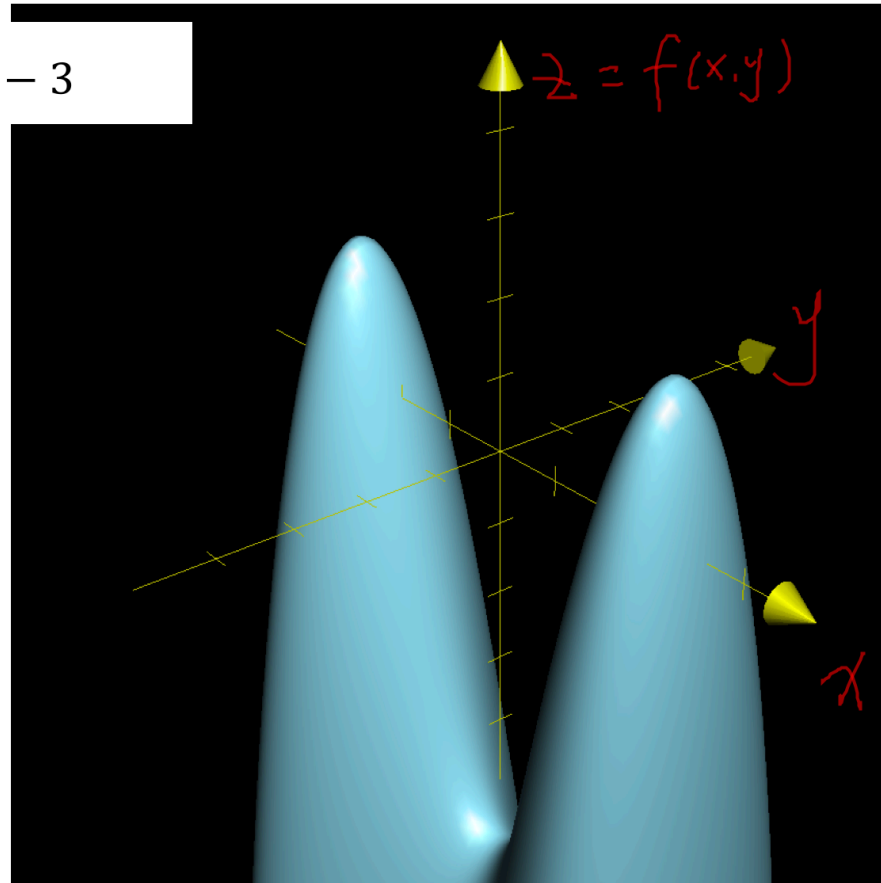
图片来自: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/gradient-and-directional-derivatives/a/the-gradient>

梯度场与极值

$$f(x, y) = -x^4 + 4(x^2 - y^2) - 3$$

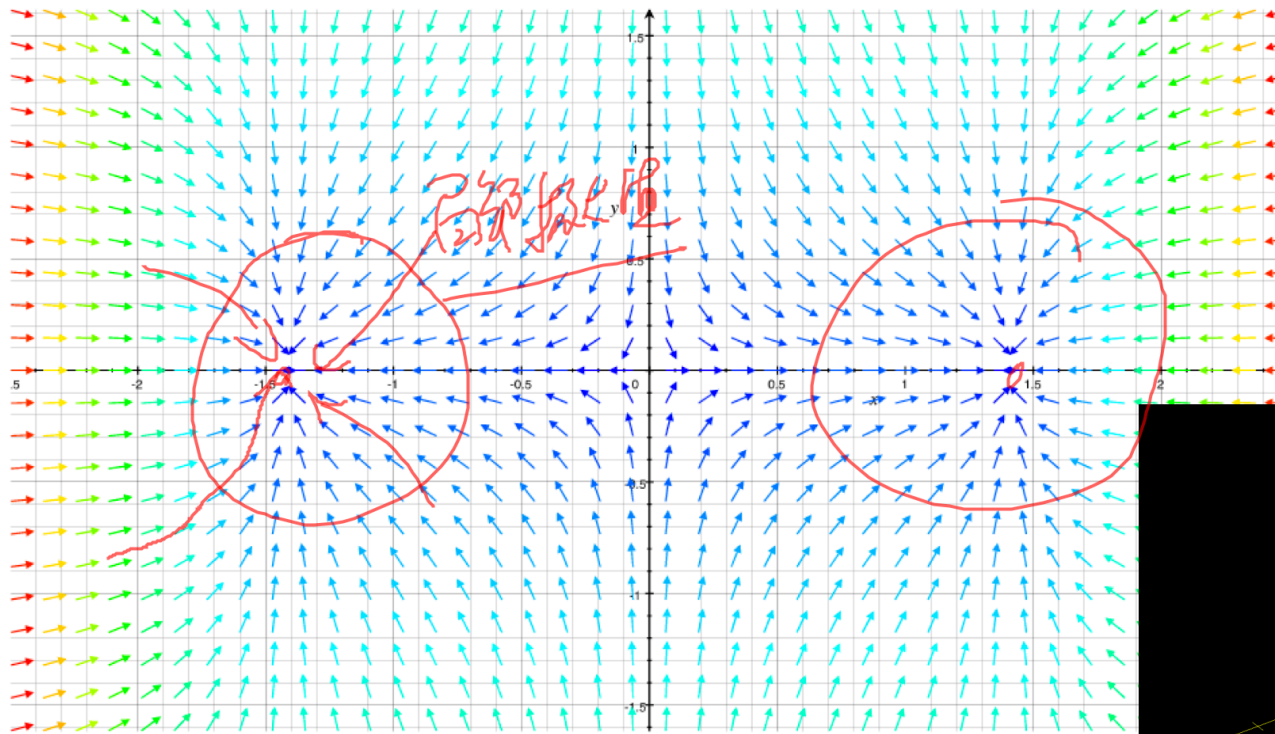
图片来自:

<https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/gradient-and-directional-derivatives/a/the-gradient>



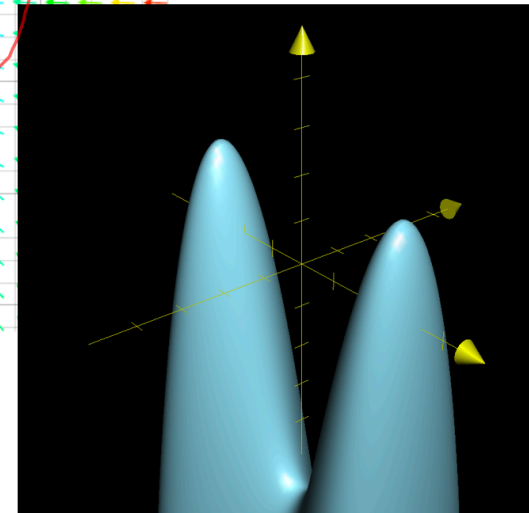
梯度场与极值

梯度方向 = 箭头方向



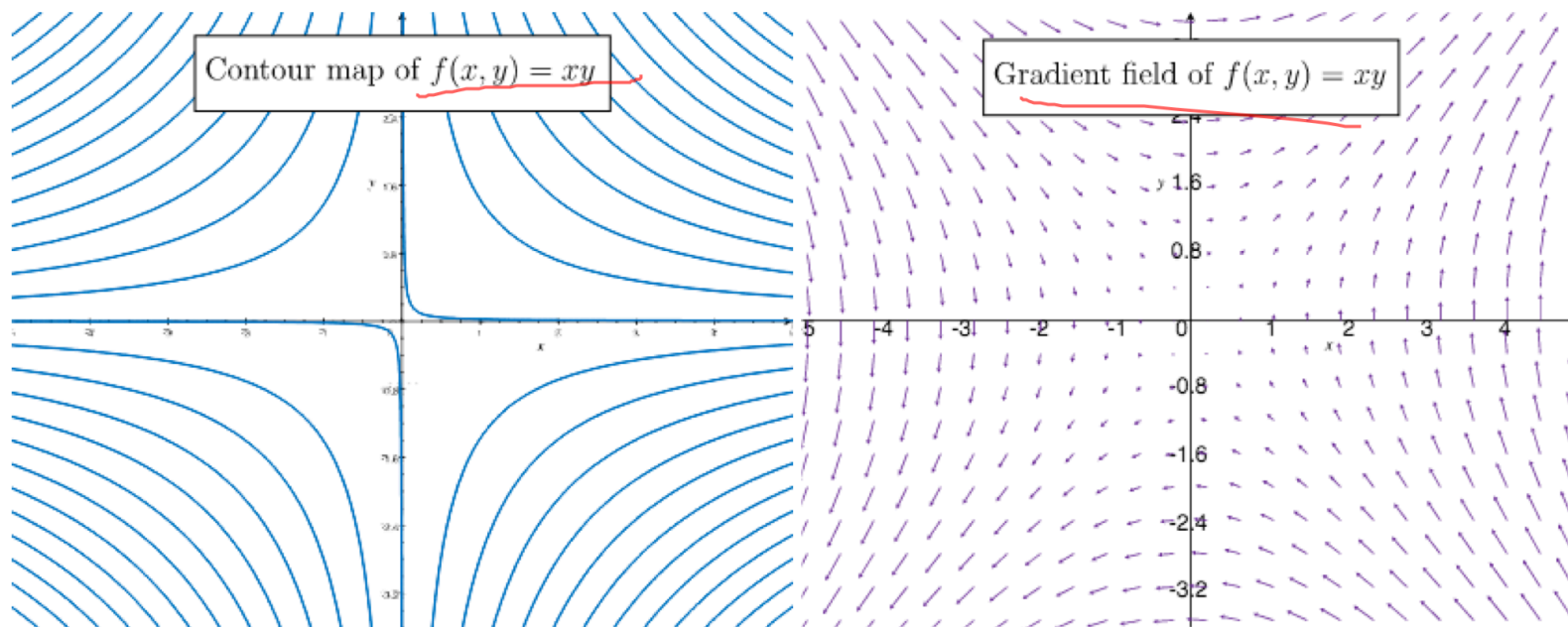
沿着箭头
→ 函数
上升

图片来自: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/gradient-and-directional-derivatives/a/the-gradient>



梯度场与等高线

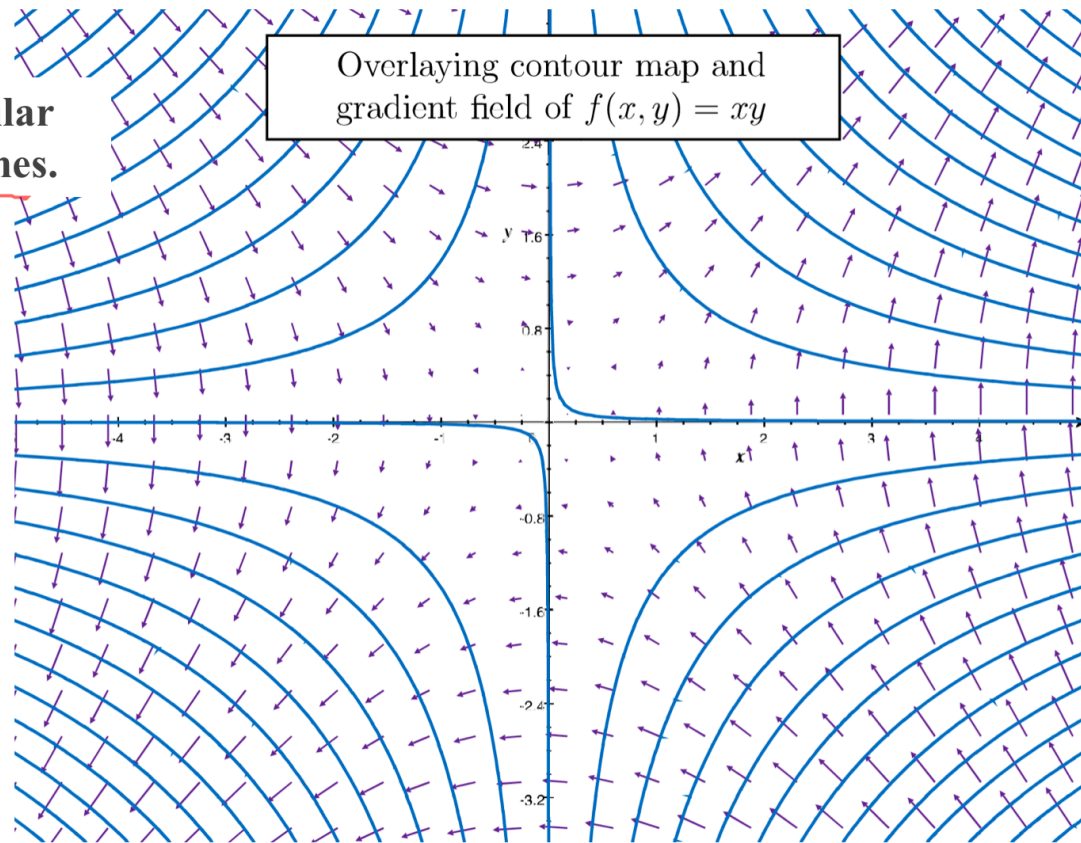
$$xy = C$$



图片来自: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/gradient-and-directional-derivatives/a/the-gradient>

梯度场与等高线

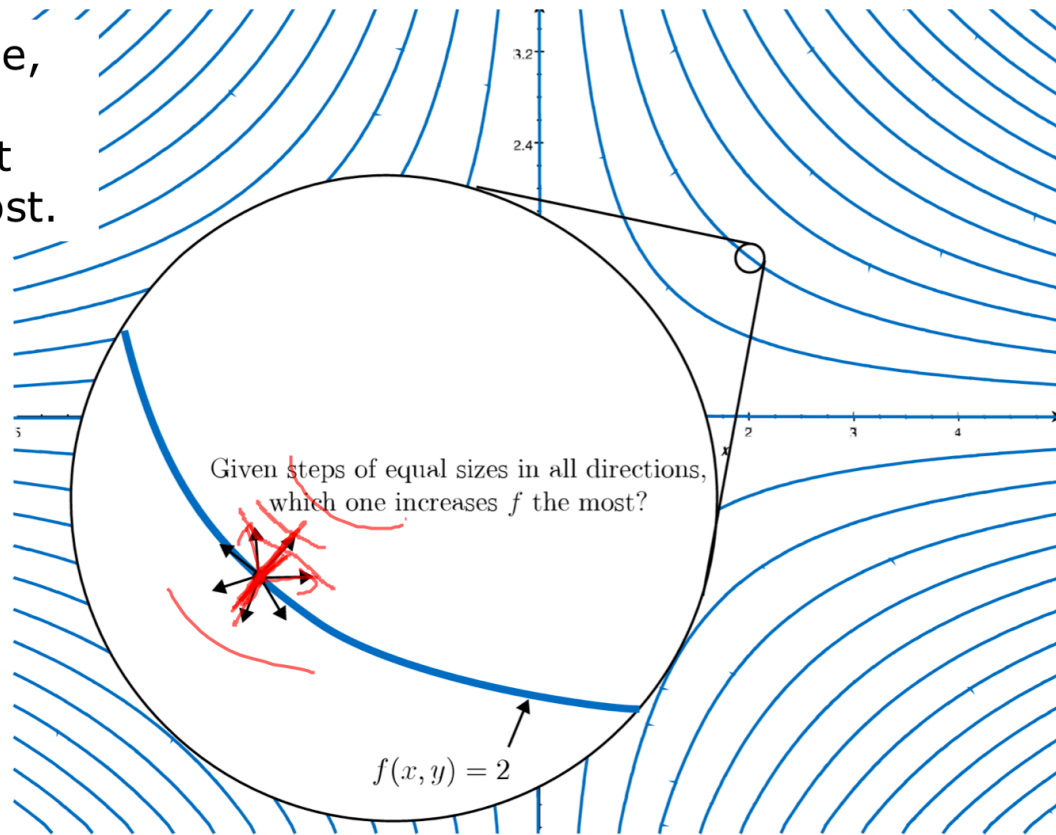
Each vector is perpendicular to the contour line it touches.



图片来自: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/gradient-and-directional-derivatives/a/the-gradient>

梯度场与等高线

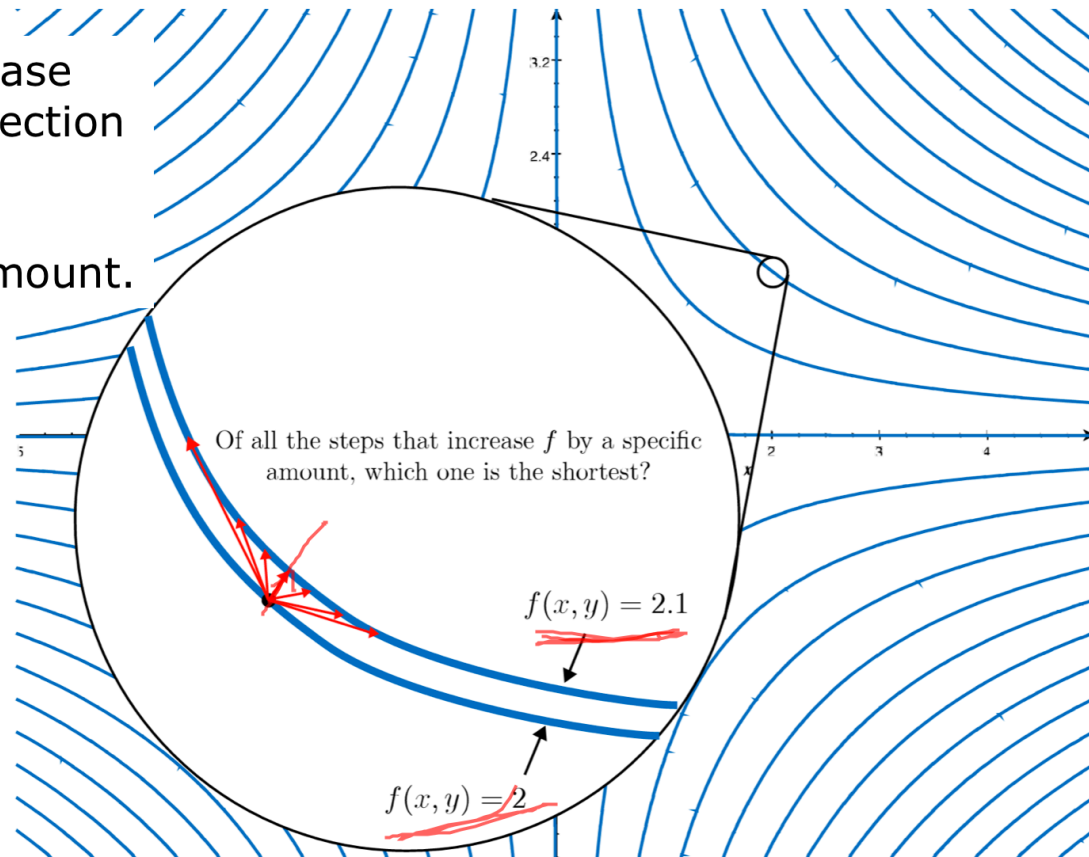
Choose a fixed step size, and find the direction such that a step of that size increases f the most.



图片来自: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/gradient-and-directional-derivatives/a/the-gradient>

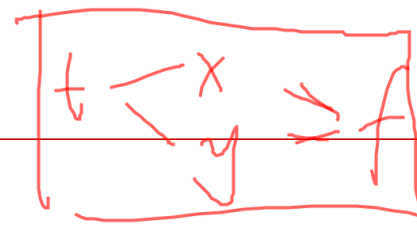
梯度场与等高线

Choose a fixed increase in f , and find the direction such that it takes the *shortest* step to increase f by that amount.



图片来自: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/gradient-and-directional-derivatives/a/the-gradient>

链式法则



How f changes due to a tiny change in x

How x changes due to a tiny change in t

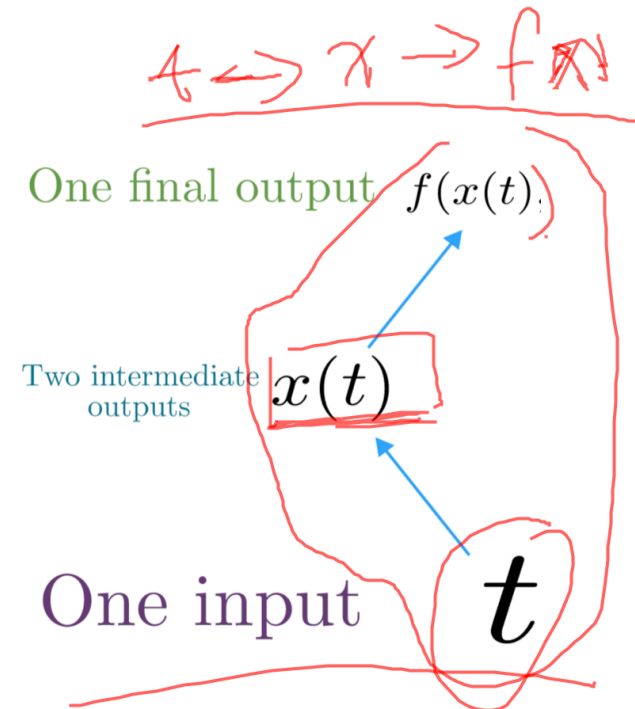
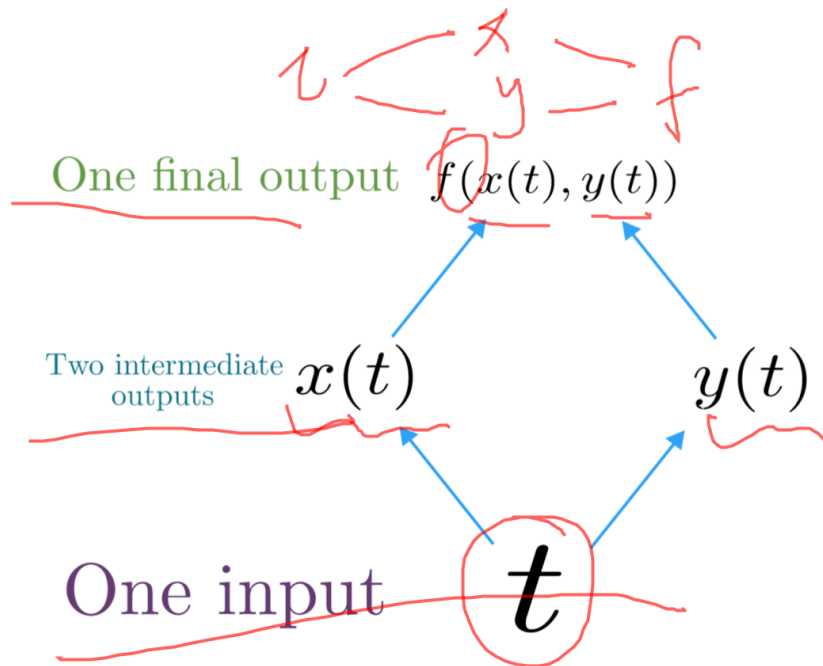
$\frac{d}{dt}$

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt}}_{\text{Total change in } f \text{ due to the influence } t \text{ has on } x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}}_{\text{Total change in } f \text{ due to the influence } t \text{ has on } y}$$

This is an ordinary derivative not a partial derivative $\frac{\partial}{\partial t}$, because the total composition has one input and one output.

图片来自: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/differentiating-vector-valued-functions/a/multivariable-chain-rule-simple-version>

链式法则



图片来自: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/differentiating-vector-valued-functions/a/multivariable-chain-rule-simple-version>

链式法则

- 设 $z = e^{xy} \sin(x+y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

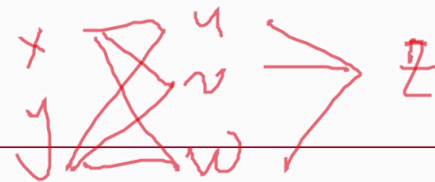
$$\frac{\partial z}{\partial (x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \begin{array}{c} \nearrow u=xy \\ \searrow v=x+y \end{array} \Rightarrow \underline{z = e^u \sin v}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = e^u \sin v \cdot y + e^u \cos v \cdot 1 \\ &= e^{xy} \sin(x+y) \cdot y + e^{xy} \cos(x+y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = e^u \sin v \cdot x + e^u \cos v \cdot 1 \\ &= e^{xy} [x \sin(x+y) + \cos(x+y)] \end{aligned}$$

链式法则



- 设 $z = f(u, v, w)$ 其中 $u = e^x$, $v = xy$, $w = y \sin x$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ y & x \\ y \cos x & \sin x \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e^x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v} + y \cos x \frac{\partial f}{\partial w} \\ x \frac{\partial f}{\partial v} + \sin x \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

链式法则

- 设 $z = f(x, y, w)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中有连续的一阶偏导数，求复合函数 $z =$

$f(x, y, x^2y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{matrix} f'_1 & f'_2 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{matrix}$$

$f(u, v, t)$



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{bmatrix}$$



一阶全微分形式的不变性

$x \quad y \quad z$
 $y \quad v \quad z$

定理 (一阶全微分形式的不变性)

设 $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v =$

$v(x, y)$ 都有连续的偏导数, 则复合函数

$$z = f(u(x, y), v(x, y))$$

在点 (x, y) 处的全微分可以表示为

$$dz = f_u du + f_v dv$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

上述定理说明不论 u, v 是自变量还是中间变量, 一阶全微分可以表示成相同的形式。

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)$$

$$= f_u du + f_v dv$$

一阶全微分形式的不变性

- 设 $u = \sin(x^2 + y^2) + e^{xz}$ 求在 $(1,0,1)$ 处的全微分 du 。

解

$$\begin{aligned} du &= \cos(x^2 + y^2) d(x^2 + y^2) + e^{xz} d(xz) \\ &= \cos(x^2 + y^2) (2x dx + 2y dy) + e^{xz} (x dz + z dx) \\ &\text{代入 } (x, y, z) = (1, 0, 1) \\ &= \cos 1 (2dx) + e (dz + dx) \\ &= (2\cos 1 + e) dx + e dz \end{aligned}$$

高阶微分

$$f(x) = y$$

$$d^n f = f^{(n)}(x) dx^n$$

$$dx^n = (dx)^n$$

定理 (高阶微分公式) 当 $f \in C^n(D)$ 时, f 在区域 D 内的 n 次微分为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

$$d^n f = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$$

$$df = f_x dx + f_y dy$$

$$d(df) = \frac{\partial}{\partial x} (f_x dx + f_y dy) dx + \frac{\partial}{\partial y} (f_x dx + f_y dy) dy$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

$$= \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$$

我们在这里

□ 问题答疑：

<http://www.xxwenda.com/>

■ 可邀请老师或者其他人回答问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop



法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



二元函数的微分中值定理

定理 (二元函数的微分中值定理)

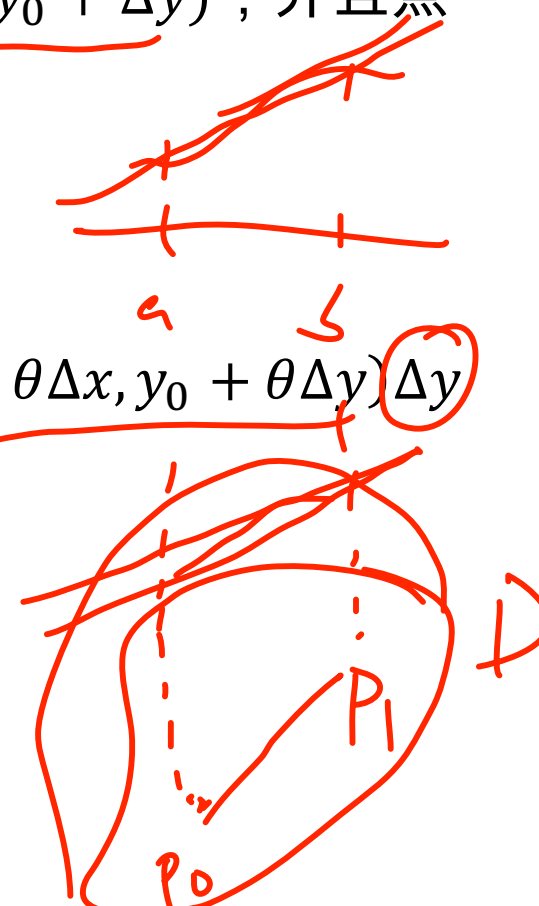
设 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内有连续的

偏导数，又假定 D 中有两个点 $P_0(x_0, y_0)$ 和 $P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ ，并且点 P_0 到 P_1 的直线段在 D 中，则存在 $0 < \theta < 1$ ，使得

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$= f(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y$$

$$f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$$



二元函数的泰勒公式

$\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$

定理 (二元函数的泰勒公式) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为区, 函数 $f(x, y) \in C^{n+1}(D)$.

又设 $P_0(x_0, y_0) \in D, P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$, 且 P_0 至 P_1 的连线 $\overline{P_0 P_1} \subset D$, 则有

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \end{aligned}$$

其中 $d^k f$ 是 f 的 k 阶微分, 即

$$d^k f(x, y) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, n+1$$

二元函数的泰勒公式

在上述公式中，最后一项

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$$

称为拉格朗日余项，如果我们假设f的n+1阶偏导数有界，即存在常数M，使得

$$\left| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^l \partial y^{n+1-l}} \right| \leq M, \quad l = 0, 1, \dots, n+1$$

那么我们有

$$R_n \leq \frac{M}{(n+1)!} (|\Delta x| + |\Delta y|)^{n+1}$$

$\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$

$\rightarrow 0$

二元函数的泰勒公式

如果令 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ，即得到

$$R_n \leq \frac{M}{(n+1)!} \rho^{n+1} \left(\frac{|\Delta x|}{\rho} + \frac{|\Delta y|}{\rho} \right)^{n+1} \leq \frac{M 2^{n+1}}{(n+1)!} \rho^{n+1}$$

可以看出固定 $\Delta x, \Delta y$ 时，

$$R_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

固定 n ，令 $\rho \rightarrow 0$ ，则

$$R_n = o(\rho^n) \quad (\rho \rightarrow 0)$$

二元函数的泰勒公式

固定 n ，令 $\rho \rightarrow 0$ ，则

$$R_n = o(\rho^n) \quad (\rho \rightarrow 0)$$

于是我们得到二元函数带佩亚诺型余项的泰勒公式

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

$$= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + o(\rho^n)$$

$$\text{其中 } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$$

二元函数的泰勒公式

与一元函数相同，多元函数的泰勒多项式也成立唯一性定理，即若 $P_n(\Delta x, \Delta y)$ 是 Δx 与 Δy 的 n 次多项式，且

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = P_n(\Delta x, \Delta y) + o(\rho^n) \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$$

则 $P_n(\Delta x, \Delta y)$ 是函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的泰勒多项式。

$$f(x_0 + \Delta x) = P_n(\Delta x) + o(\Delta x^n)$$

$f(x)$ 是 Taylor.

$$f(x, y) = h(x, y)$$

$f(x, y)$

二元函数的泰勒公式

求函数 $f(x, y) = \sin(\frac{\pi}{2}x^2y)$ 在点 $(1, 1)$ 处的二阶泰勒多项式及带佩亚诺余项的泰勒公式。

$(x, y) = (1, 1)$
 $f(1, 1) = 1$
 $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1, 1)} = 0$
 $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1, 1)} = 0$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(1, 1)} = -\frac{\pi^2}{2}$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1, 1)} = -\frac{\pi^2}{2}$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(1, 1)} = -\frac{\pi^2}{4}$

$\Delta x = \delta x, \Delta y = \delta y$
 $f(1+\delta x, 1+\delta y) = 1 + 0 + (\Delta x, \Delta y) \begin{bmatrix} -\frac{\pi^2}{2} & -\frac{\pi^2}{2} \\ -\frac{\pi^2}{2} & -\frac{\pi^2}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} + o(\rho^2)$

二元函数的泰勒公式

在点(0,0)的邻域内，将函数 $f(x, y) = e^x \cos y$ 按照带佩亚诺余项的泰勒公式展开至二次项。

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(e^y) \\ \cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^4) \end{cases} \quad \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{matrix} \\
 & \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \begin{matrix} t = o(x^2) = o(\rho^2) \\ o(y^2) = o(\rho^2) \\ o(x^2) \cdot o(y^2) = o(\rho^4) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{t}{x^2} \\ \frac{t}{x^2 + y^2} = \frac{t}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 1 \end{matrix} \\
 & \underline{e^x \cos y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + o(\rho^2)} \quad (\rho \rightarrow 0)
 \end{aligned}$$

泰勒公式

定理 (泰勒公式) 设函数 $f(x)$ 在 $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ 的邻域

$U(x_0, \delta_0) (\delta_0 > 0)$ 内具有 $K+1$ 阶连续偏导数, 则对于 $\forall x_0 + h = (x_1^0 +$

$h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_n^0 + h_n) \in U(x_0, \delta_0)$, 有

$f(x_0 + h)$

$\frac{1}{k!} \partial^k f(x_0 + h)$

$(\partial_x^2 + \partial_y^2)^k$

$$= f(x_0) + \sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(x_0) + \frac{1}{(K+1)!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{K+1} f(x_0 + \theta h)$$

其中 $0 < \theta < 1$ 。记 $R_{K+1}(h) = \frac{1}{(K+1)!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{K+1} f(x_0 + \theta h)$ 为拉格朗

日余项。

泰勒公式

定理 (泰勒公式) 设函数 $f(x) \in C^K(U(x_0, \delta_0)) (\delta_0 > 0)$, $x_0 + h \in U(x_0, \delta_0)$, 有

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(x_0) + o(|h|^K)$$

$(|h| \rightarrow 0)$

称 $o(|h|^K)$ 为佩亚诺余项, 如果 $f(x)$ 在 x_0 能展开成为

$$f(x_0 + h) = P_K(h_1, \dots, h_n) + o(|h|^K)$$

其中 P_K 是 n 元 K 次多项式, 上式必然是 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta_0)$ 内的泰勒公式。

泰勒公式

在泰勒公式中我们常常会用到 $K=1$ 的情形，有

$$f(x_0 + \mathbf{h}) = f(x_0) + \overbrace{f'(x_0)}^{\text{grad} f(x_0)} \cdot \mathbf{h}^T + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{二阶项}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{H}_f(x_0) \mathbf{h}^T + o(|\mathbf{h}|^2) \quad (|\mathbf{h}| \rightarrow 0)$$

其中 $\mathbf{H}_f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处的海色矩阵。

$$\mathbf{R}_f(x_0) \mathbf{h}^T$$

隐函数的存在性

一个二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数是指这样的函数 $y = f(x)$,
使得其在定义域内满足

$$F(x, f(x)) = 0$$

同时我们可以考虑三元的提法，对于 $F(x, y, z) = 0$
这时要求隐函数 $z = f(x, y)$ 满足

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$

我们还可以考虑多个方程的情况

$$\begin{cases} F(x, y; u, v) = 0 \\ G(x, y; u, v) = 0 \end{cases}$$

确定的隐函数可以表示为 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 。

一个方程的情况

$$F(x,y)=0$$



定理 设函数 $F(x,y)$ 在一点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域内有定义，且满足

(1) $F(x_0, y_0) = 0$ O_{xy}

(2) $F_x(x, y), F_y(x, y)$ 连续，并且 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

则在 x_0 的某个邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内存在一个函数 $y = f(x)$ ，使得 $y_0 = f(x_0)$

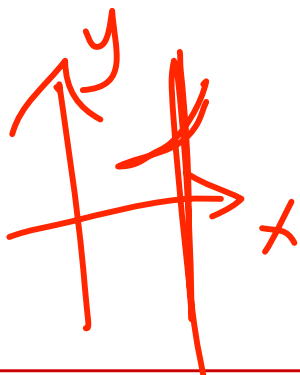
且

$$F(x, y) = 0$$
$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

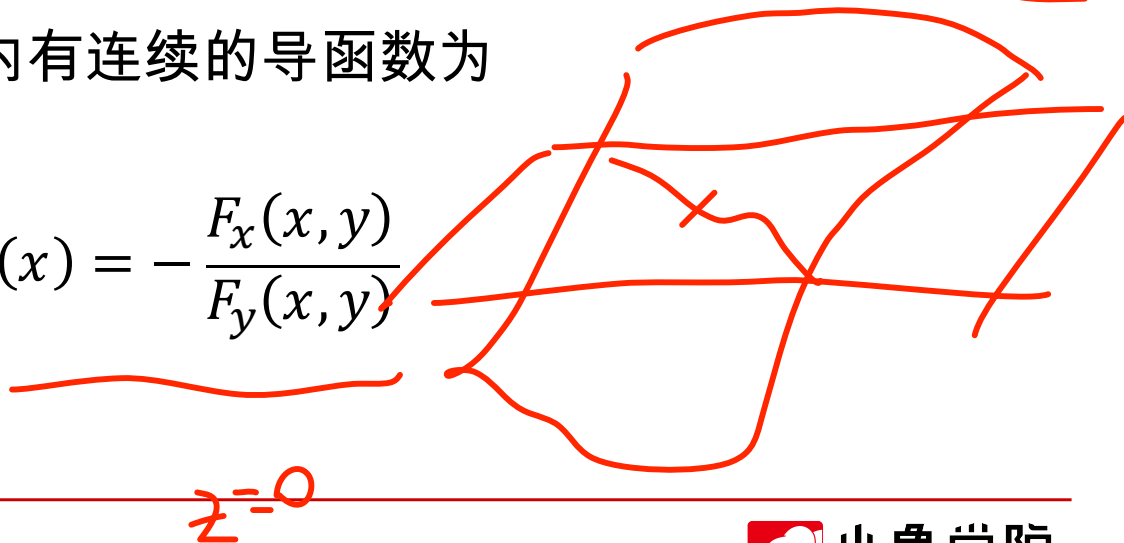
$$F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$z = F(x, y) \quad z=0$$

并且 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内有连续的导函数为



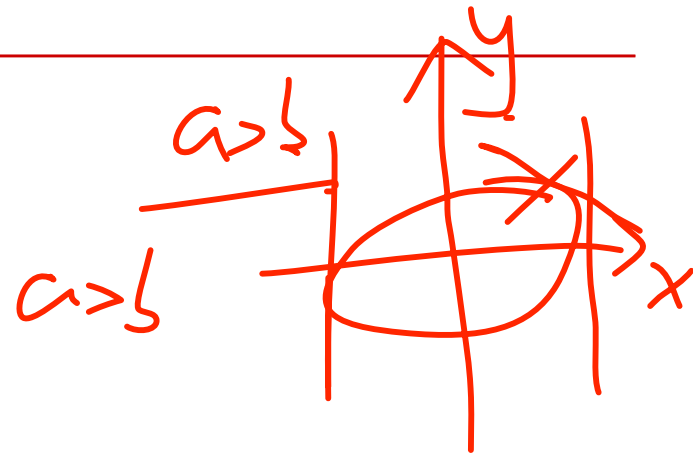
$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$



一个方程的情况

求方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



在点 $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ 附近所确定的隐函数的导函数。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{代入 } (x, y) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}$$

一个方程的情况

求方程 $xy + yz + e^{xz} = 3$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的偏导数 z_x, z_y .

$F(x, y)$

$F(x, y, z)$

(x, y)

$F_z(x, y, z)$

$$y + y z_x + e^{xz} (z + x z_x) = 0$$
$$z_x = - \frac{y + z e^{xz}}{y + x e^{xz}}$$

$$x + z + y z_y + e^{xz} x z_y = 0$$
$$z_y = - \frac{x + z}{y + x e^{xz}}$$

一个方程的情况

求由方程 $F(x-y, y-z) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的偏导数 z_x, z_y .

$F(u, v)$

$F'_1 \quad F'_2$
 $\parallel \quad \downarrow$
 $\frac{\partial F}{\partial u} \quad \frac{\partial F}{\partial v}$

$$F'_1 + F'_2(-z_x) = 0$$
$$z_x = \frac{F'_1}{F'_2}$$

$$F'_1(x-y)' + F'_2(y-z)' = 0$$
$$F'_1(-1) + F'_2(1-z_y) = 0$$
$$z_y = \frac{-F'_1 + F'_2}{F'_2}$$

方程组的情况

对于方程组

$$\begin{cases} F(x, u, v) = 0 \\ G(x, u, v) = 0 \end{cases}$$

(Handwritten red notes: (x, u, v) and u, v with arrows pointing to the variables in the equations.)

在每一个等式两边同时对 x ，~~求~~求偏导，那么可以得到方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

(Handwritten red circles around $\frac{\partial u}{\partial x}$ and $\frac{\partial v}{\partial x}$ in both equations, and a red arrow pointing to the equations with the label T_u .)

将 $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x})$ 看成未知数，那么根据Cramer法则，上述方程组有惟一解的充

要条件是 F, G 的雅克比行列式不为零，记为

$$J \triangleq \frac{D(F, G)}{D(u, v)} \triangleq \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0$$

(Handwritten red circles around the Jacobian determinant expression and the matrix.)

方程组的情况

定理 设 $F(x, u, v) = 0$, $G(x, u, v) = 0$ 在一点 (x_0, u_0, v_0) 的某个邻域内有连续的一阶偏导数, 并且 $F(x_0, u_0, v_0) = G(x_0, u_0, v_0) = 0$, 又设 F, G 的雅可比行列式 $J \triangleq \frac{D(F, G)}{D(u, v)}$ 在点 (x_0, u_0, v_0) 处不为零, 则在 x_0 的一个邻域内, 存在惟一的一对函数 $u = u(x), v = v(x)$ 使得 $u = u(x_0), v = v(x_0)$ 且满足方程组

$$\begin{cases} F(x, u(x), v(x)) = 0 \\ G(x, u(x), v(x)) = 0 \end{cases}$$

此外, 函数 $u(x), v(x)$ 是可微的, 其导函数可以有下方程组求出

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

方程组的情况

由方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - uv = 0 \\ xy + u^2 - v^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} F(u, v; x, y) = 0 \\ G(u, v; x, y) = 0 \end{matrix}$$

能否确定 u, v 为 x, y 的函数，在能确定函数的条件下，求 u_x, v_x, u_y, v_y 。

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{bmatrix} -v & -u \\ 2u & -2v \end{bmatrix} = 2(u^2 + v^2)$$

$\neq 0$ 且 $2(u^2 + v^2) \neq 0$ 则隐函数存在。

$$\begin{cases} 2x - u v_x - v u_x = 0 \\ y + 2u u_x - 2v v_x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{4xv - yu}{2(u^2 + v^2)} \\ v_x &= \frac{4xu + vy}{2(u^2 + v^2)} \end{aligned}$$

逆映射存在定理

考虑Oxy平面上的二元映射 $(u, v) \mapsto (x, y)$ $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ $\begin{matrix} X - x(u, v) = 0 \\ Y - y(u, v) = 0 \end{matrix}$

逆映射存在问题就是说在一定范围内，对于给定的(x,y)能否求出(u,v)，也就是说u, v能否写成x, y的函数。等式两边同时对x, y求导，有

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \begin{cases} 1 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

从上述方程组中解 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 关键是

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0?$$

逆映射存在定理

定理 设函数 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 在 (u_0, v_0) 的一个邻域内有连续的一阶偏导数，且雅克比行列式

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} \neq 0$$

设 $x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0)$ ，则在 (x_0, y_0) 的一个邻域内存在函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 使得 $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$ ，且映射

$$(x, y) \mapsto (u, v)$$

是 $(u, v) \mapsto (x, y)$ 的逆映射，且

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \Big|_{(x_0, y_0)} = 1$$

Handwritten notes and diagrams:

- A diagram showing a mapping from (u, v) to (x, y) with arrows.
- A Jacobian matrix calculation: $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$.

逆映射存在定理

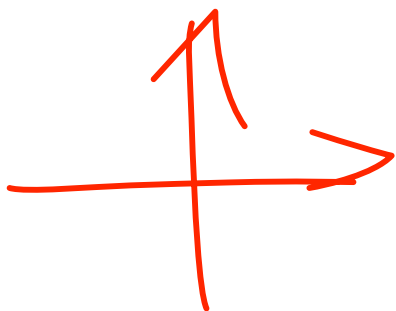
求极坐标变换

原系
 $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

的雅克比行列式。

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \quad r \neq 0$$



逆映射存在定理

设 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 是由方程组

$$\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases}$$

所确定的隐函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 。

$$\begin{cases} 2u u_x - v_x = 3 \\ u_x - 4v v_x = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1 - 12v}{1 - 2uv}$$

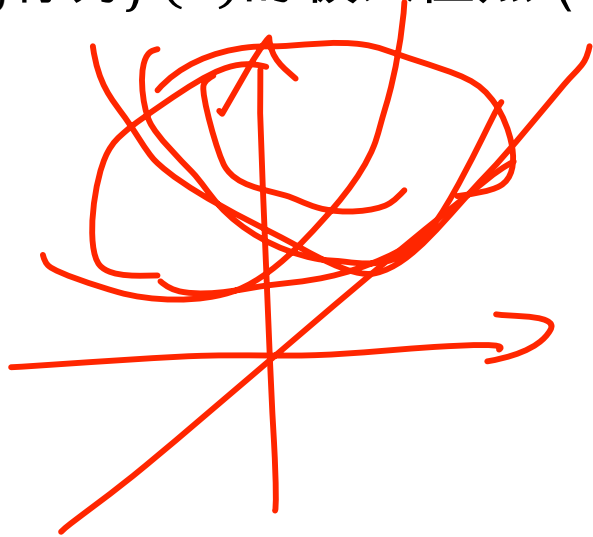
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u - 3}{1 - 2uv}$$

$$\begin{bmatrix} 2u & -1 \\ 1 & -4v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

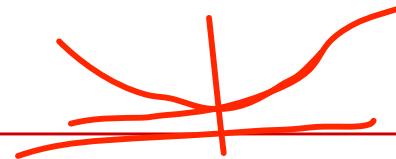
多元函数的极值

定义 (多元函数的极值)

设函数 $u = f(x)$ 在区域 D 内有定义, $x_0 \in D$, 若存在 x_0 的邻域 $U(x_0, \delta_0) \subset D (\delta_0 > 0)$, 使得当 $x \in U(x_0, \delta_0)$ 时, 有 $f(x) \leq f(x_0)$ (或者 $f(x) \geq f(x_0)$), 则称 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值 (或极小值), x_0 称为 $f(x)$ 的极大值点 (或极小值点)



多元函数的极值



定理 (Fermat) 设函数 $u = f(x)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内有定义, $x_0 \in D$, 若 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值并且可微, 则 $f'(x_0) = 0$. $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

如同一元函数, 对 x_0 , 如果成立 $f'(x_0) = 0$, 那么称 x_0 为 $f(x)$ 的一个驻点 (稳定点, 或者临界点)。对于可微函数 $f(x)$ 而言, 极值点一定是稳定点, 但是反之不真。

Handwritten notes in red ink:

- $y = x^2$
- $f(x)$
- $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$
- $f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$
- $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$

多元函数的极值

定理 设函数 $u = f(x)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内有连续的二阶导数，且

$f'(x_0) = 0$ ，再设 $f(x)$ 在 x_0 处的海色矩阵 $H_f(x_0)$ 为满秩矩阵，则

(1) 当 $H_f(x_0)$ 正定时， $f(x)$ 在 x_0 处取极小值。

(2) 当 $H_f(x_0)$ 负定时， $f(x)$ 在 x_0 处取极大值。

(3) 当 $H_f(x_0)$ 不定时， $f(x)$ 在 x_0 处取不取极值。

$f''(x) > 0$

$f''(x)$

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T H_f(x_0) (x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$$

多元函数的极值

求函数 $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x - 3y$ 的极值

$$f'_x(x, y) = 2x + 3y - 6$$

$$2f(x) = 0$$

$$f'_y(x, y) = 3x + 6y - 3 = 0$$

稳定点 $(9, -4)$

$$f''_{xx}(x, y) = 2$$

$$f''_{xy}(x, y) = 3$$

$$f''_{yy}(x, y) = 6$$

$$Hf(9, -4) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

正定

$$= -21$$

$(9, -4)$ 取极值

条件极值

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

对于二元函数 $z = f(x, y)$ ，在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 的约束下，假设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 都具有连续的一阶偏导数，并且 $\varphi_y(x, y) \neq 0$ ，那么由条件可以确定一个隐函数 $y = y(x)$ ，将其代入函数表达式得到

$$z = f(x, y(x))$$

这样条件极值问题就转化成普通极值问题，那么求稳定点

$$\frac{dz}{dx} = f_x - f_y \frac{\varphi_x}{\varphi_y} = 0$$

即

$$\frac{f_x}{\varphi_x} = \frac{f_y}{\varphi_y}$$

条件极值

假设

$$\frac{f_x}{\varphi_x} = \frac{f_y}{\varphi_y} = \lambda$$

那么条件极值必须满足方程

$$\begin{cases} f_x + \lambda \varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda \varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

引入辅助函数

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

Handwritten notes:
 $f_x + \lambda \varphi_x = 0$
 $f_y + \lambda \varphi_y = 0$
 $\varphi(x, y) = 0$

那么上述方程组恰好是三元函数 $F(x, y, \lambda)$ 的普通极值点所需要满足的条件。

条件极值

求函数 $f(x, y, z) = xyz$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 上的最大值

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$$

$$\lambda = -\frac{yz}{2x} = -\frac{xz}{2y} = -\frac{xy}{2z}$$

$$\nabla F = 0$$

$$\begin{cases} F_x = yz + 2x\lambda = 0 \\ F_y = xz + 2y\lambda = 0 \\ F_z = xy + 2z\lambda = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 = z^2 \\ \left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}$$

$$\frac{R^3}{3\sqrt{3}}$$

取正值。

条件极值

拉格朗日乘数法则：对于多元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在条件

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

约束下的极值，我们作辅助函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

解方程组

$$F_{x_1} = 0, \dots, F_{x_n} = 0, F_{\lambda_1} = 0, \dots, F_{\lambda_k} = 0$$

即可求得条件极值的稳定点。

条件极值

在拉格朗日乘数法中，条件极值问题转化为

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^k \lambda_j \varphi_j(\mathbf{x})$$

的一般极值问题。当 $\mathbf{x}_0$ 是稳定点时， $\lambda_j (j = 1, 2, \dots, k)$ 是 k 个常数，因此我们利用 $F(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处的海色矩阵 $H_F(\mathbf{x}_0)$ 来判断 $\mathbf{x}_0$ 是否为极值点。可以证明：当 $H_F(\mathbf{x}_0)$ 正定时，条件极值为极小值点；当 $H_F(\mathbf{x}_0)$ 负定时，条件极值为极大值点。但是值得注意的是 $H_F(\mathbf{x}_0)$ 不定时，条件极值可能仍然可以取到。

e.g. $f(x, y) = x^2 - y^2, \varphi(x, y) = y = 0$

$(0, 0)$
 $L(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda y$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

条件极值

求椭圆球面 $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$ 内接且各面均平行于坐标平面的长方体的最大体积。

$$\begin{aligned} (x, y, z) &> 0 \\ V &= f(x, y, z) = 8xyz \\ V_{\max} &= 64\sqrt{3} \\ F(x, y, z, \lambda) &= 8xyz + \lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144) \\ \nabla F = 0 &\Rightarrow \begin{cases} 8yz + 32\lambda x = 0 \\ 8xz + 8\lambda y = 0 \\ 8xy + 18\lambda z = 0 \\ 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0 \end{cases} \\ xyz &= -12\lambda \\ -32\lambda(15 - x^2) &= 0 \\ x &= \sqrt{5} \\ y &= 2\sqrt{5} \\ z &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

条件极值

设~~n个正数~~^{正数}之和为c，试求它们乘积的最大值，并且证明对于任何的正数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，有

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^n x_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - c \right)$$

$$F = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 x_3 \dots x_n + \lambda = 0 \\ \vdots \\ x_1 \dots x_{n-1} + \lambda = 0 \\ \sum x_i = c \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{c} = \dots = \sqrt[n]{c} = \frac{c}{n}$$

$$\lambda = -\left(\frac{c}{n}\right)^{n-1}$$

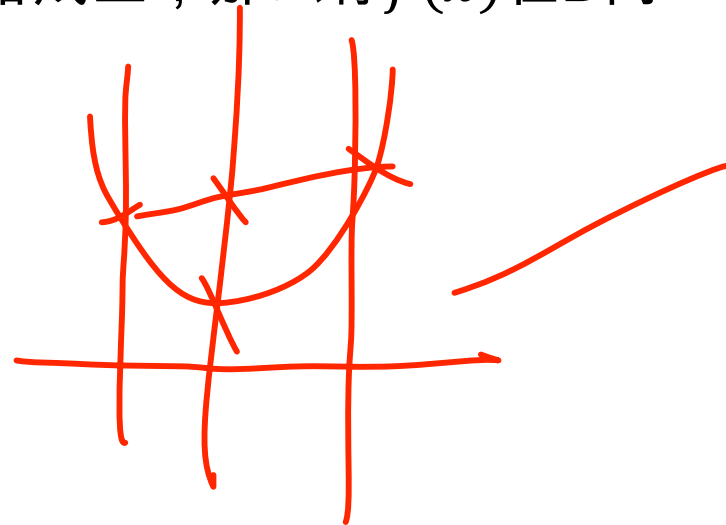
$$\prod x_i \leq \frac{c^n}{n^n} = \frac{(x_1 + \dots + x_n)^n}{n^n}$$

多元凸函数

定义 (凸函数) 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸域, $f(x)$ 在 D 内有定义, 如果对于 $\forall x_1, x_2 \in D$ 和 $\forall t \in (0,1)$, 有

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在 D 内是凸函数, 如果上述不等式严格成立, 那么称 $f(x)$ 在 D 内为严格凸函数。



多元凸函数

定义 (凸函数) 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸域, $f(x)$ 在 D 内连续的二阶偏导数, 则以下结论等价:

(1) $f(x)$ 在 D 内是凸函数

(等价)

(2) 对于 $\forall x_0, x \in D$, 成立 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)'$

(3) ~~对于 $\forall x_0 \in D$, $f(x)$ 在 x_0 处的海色矩阵 $H_f(x_0)$ 半正定。~~

(正定)

我们在这里

□ 问题答疑：

<http://www.xxwenda.com/>

■ 可邀请老师或者其他人回答问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop

